Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 2:

Aufgabe 1: Gegeben seien zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) := n^2$$

und $g(n)$ ist als die grösste natürliche Zahl k definiert, so dass $k^2 \leq n$ ist.
(a) Bestimmen Sie die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$.
(b) Sind die Abbildungen f und g injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!
(c) Bestimmen Sie die Urbilder von $A := \{1, 3\}$ unter f und g.

Aufgabe 2: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
Für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt: $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$. Können Sie ein Beispiel angeben, bei dem die Inklusion echt ist, also keine Gleichheit vorliegt?

Aufgabe 3: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) f ist injektiv.
(ii) Für alleTeilmengen $A, B \subseteq X$ gilt: $f(A) - f(B) = f(A - B)$.
(ii) Für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt: $A = f^{-1}(f(A))$.

Aufgabe 4: (a) Seien Y, Z Mengen. Zeigen sie, dass eine Abbildung $g : Y \to Z$ genau dann injektiv ist, wenn gilt: Für alle Mengen X und Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ gilt: $g \circ f_1 = g \circ f_2$ impliziert $f_1 = f_2$.
(b) Seien X, Y Mengen. Zeigen sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann surjektiv ist, wenn gilt: Für alle Mengen Z und Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ impliziert $g_1 = g_2$.