Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 10:

Aufgabe 1: Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$.
(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{Q}^6$ Gleichungssystems $Ax = 0$.
(b) Geben Sie eine Basis B von L an.
(c) Ergänzen Sie B zu einer Basis des $\mathbb{Q}^6$.

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, ..., v_n)$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Elementen aus V linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden.
(a) $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, ..., v_{n-1} + v_n)$.
(b) $(v_1, v_1 + v_2, ..., v_1 + \; + v_n)$.
Ergänzen Sie jeweils die linear unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V .

Aufgabe 3: Sei M eine Menge und K ein Körper.
(a) Entscheiden Sie, wann $V := Abb(M, K)$, der Vektorraum aller Abbildungen von M nach K, endlich erzeugt ist.
(b) Bestimmen Sie im endlich erzeugten Fall eine Basis von V.

Aufgabe 4: Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$. Zeigen Sie:
(a) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V ist und jede echte Teilmenge $C \subset B$ kein Erzeugendensystem von V ist.
(b) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B eine linear unabhängige Teilmenge von V ist und jede echte Obermenge $C \subset V$ mit $B \subset C$ keine linear unabghängige Teilmenge von V ist.