Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 11 (Anwesenheitsaufgaben):

Das Thema ist der Körper der komplexen Zahlen. Diese Übungsstunden ersetzen zwei Vorlesungen, d.h. es wird neuer Stoff selbst erarbeitet, der auch **Prüfungsstoff** ist.

Aufgabe 1: Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Gruppenstruktur $+$, die durch die übliche Addition gegeben ist. Wir definieren eine Multiplikation:

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

durch

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + yx').$$

a) Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper ist, den man mit $\mathbb{C}$ bezeichnet, der **Körper der komplexen Zahlen**.
b) Wir bezeichnen $(0, 1) \in \mathbb{C}$ mit i. Zeige, dass wenn $*$ eine weitere Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ ist, so dass wir mit der obigen Addition und der Multiplikation $*$ einen Körper erhalten, und $i * i = -1$ und $(a, 0) * (x, y) = (ax, ay)$ für alle $a, b, x \in \mathbb{R}$ ist, diese Multiplikation mit der obigen Multiplikation $\cdot$ übereinstimmt.

Aufgabe 2: Zeige, dass $K := \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist, d.h. dass die Addition und Muktiplikation zweier Elemente aus K in K liegt, und K mit diesen beiden Opertionen ein Körper ist. Wir identifizieren die Punkte $(x, 0) \in K$ mit den Punken $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Addition und Multiplikation auf K mit der auf $\mathbb{R}$ bzgl. dieser Identifikation übereinstimmrn.

Aufgabe 3: Sei V ein Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Dann ist die Menge V auch ein Vektorraum über den reellen Zahlen mit der gleichen Addition und der skalaren Multiplikation

$$x \cdot v := (x, 0) \cdot v$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $v \in V$. Wir bezeichnen diesen $\mathbb{R}$-Vektorraum als $V_{\mathbb{R}}$.

Sei W ein weiterer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Da als Menge $V_{\mathbb{R}} = V$ und $W_{\mathbb{R}} = W$ ist, ist f eine Abbildung von $V_{\mathbb{R}}$ nach $W_{\mathbb{R}}$.
a) Zeige, dass f als Abbildung der $\mathbb{R}$-Vektorräume $V_{\mathbb{R}}$ bzw. $W_{\mathbb{R}}$ eine lineare Abbildung ist.
b) Entscheide, ob jede lineare Abbildung $f : V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorräume auch lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{C}$-Vektorräumen V und W ist.

Aufgabe 4: Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ festes Element. Betrachte die Abbildung

$$f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(a, b) \mapsto z \cdot (a, b),$$

wo $\cdot$ die oben definierte Mutiplikation auf $\mathbb{C}$ ist.
a) Zeige, dass f_z eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}$-Vwektorruam $\mathbb{R}^2$ ist.
b) Bestimme die Matrixdarstellung von $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, also die reelle 2×2-Matrix, die f_z darstellt.