Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 12:

Aufgabe 1: Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V. Zeige:
a) f ist injektiv genau dann, wenn $f(v_1), ..., f(v_n)$ linear unabhängig ist.
b) f ist surjektiv genau dann wenn $f(v_1), ..., f(v_n)$ ein Erzeugendensytem ist.

Aufgabe 2: Sei n eine natürliche Zahl und K ein Körper und $a_0, ..., a_n$ Elemente von K. Dann nennt man die Abbildung

$$f : K \to K$$

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

eine **polynomiale Abbildung**. Zeige, das die Teilmenge P_n dieser polynomialen Abbildungen ein Untervektorraum von dem Vektorraum aller Abbidungen $f : K \to K$ ist und bestimme eine Basis von P_n.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, so dass $1 + 1 \neq 0$ ist, und a_0, a_1, a_2 Elemente von K. Untersuche, unter welchen Bedingungen die zugehörige polynomiale Abbildung $f : K \to K$, $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ linear ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass es zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl x gibt mit $x^2 = z$.
Hinweis: Wenn $z = 0$ ist, ist die Aussage klar. Sonst setzen Sie die Gleichung $(x_1, x_2)^2 = (z_1, z_2)$ an und betrachten Sie getrennt die Fälle, $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ und elimimiren Sie z_1 bzw. z_2 und zeigen, dass die entsprechende Gleichung eine Lsung hat. Sie dürfen die p, q Formel für quadratische Gleichungen über den reellen Zahlen benutzen.