Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 3:

Aufgabe 1: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.
a) Zeige: Falls $0 \leq a < n$ und $0 \leq b < n$ und $a + b \geq n$ ist, dann ist $0 \leq a + b - n < n$.
b) Sei $G := \{0, 1, ..., n-1\}$. Wir definieren $a * b := a + b$, falls $a + b < n$ ist, und $a * b := a + b - n$, falls $a + b \geq n$ ist. Zeige, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ und $1 \leq k \leq n$. Wir definieren $M_k := \{f \in S(\{1, 2, ..., n\}) \,|\, f(x_1) = x_k\}$. Gib eine bijektive Abbildung $g : M_1 \to M_k$ an.
Hinweis: Denke an die Abbildung $\tau_{1,k} : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, die nur 1 und k vertauscht, also die 1 auf k abbildet, k auf 1 und alle anderen r auf r.

Aufgabe 3: a) Sei X eine endliche Menge und A eine Teilmenge von X. Zeige, dass A eine endliche Menge ist.
b) Sei X eine endliche Menge und A und B Teilmengen von X. Zeige, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
Hinweis: Sei $|A \cap B| = k$, dann gibt es Bijektion $f : A \cap B \to \{1, 2, ..., k\}$. Betrachte die Elemente $x_i = f(i)$ und ergänze sie (nach dem Auswahlprinzip) zu Elementen von A bzw. B. Beachten Sie: Um die Odnung m einer Menge X zu bestimmen, müssen Sie stets eine Bijektion von X auf $\{1, 2, ..., m\}$ angeben!
c) Sei n eine natürliche Zahl und X eine endliche Menge und A_1, A_2,...,A_n Teilmengen von X, so dass für alle $i \neq j$ gilt: $A_i \cap A_j = \emptyset$. Zeige, dass $|A_1| + |A_2| + ... + |A_n| \leq |X|$ ist und Gleichheit genau dann gilt, wenn $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ist.

Aufgabe 4: Seien $(G, *)$ und $(H, *)$ Gruppen. Dann definieren wir

$$* : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$$

durch

$$(g, h) * (g', h') := (g * g, h * h').$$

Zeige, dass $(G \times H, *)$ eine Gruppe ist.