Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 4:

Aufgabe 1: Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe**, wenn für alle $g, h \in H$ gilt: $g * h \in H$ und H mit der Einschränkung von $*$ auf H eine Gruppe ist.

Sei H eine nicht leere Teilmenge von G. Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
i) Für alle $g, h \in H$ gilt: $g * h \in H$ und $g^{-1} \in H$.
ii) Für alle $g, h \in H$ gilt: $g * h^{-1} \in H$.
iii) Für alle $g \in H$ und $h \notin H$ gilt gilt: $g * h \notin H$.

Aufgabe 2: a) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachte $f(1)$.
b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachte $g(1, 0)$ und $g(0, 1)$.
c) Entscheide, welche der Homomorphismen injektiv, surjektiv und ein Isomorphismus sind.

Aufgabe 3: a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die Abbildung

$$f_{a,b,c,d} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(n, m) \mapsto (an + bm, cn + dm)$$

ein Homomorphismus ist. Hier steht $\mathbb{Z}^2$ fr die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
b) Zeige, dass $f_{a,b,c,d}$ ein Isomorphsimus ist, wenn $ad - bc = 1$ ist.
Hinweis: Denke daran, dass eine Abbildung genau dann bijektiv ist, wenn es eine Umkehrabbildung gibt. Betrachte $f_{d,-b,-c,a}$.

Aufgabe 4: Man nennt $(G, *)$ eine **zyklische Gruppe**, wenn es ein $g \in G$ gibt, so dass es für jedes $h \in G$ ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $h = g^k$ ist. Dabei ist g^k das Produkt von k Exemplaren von g für $k > 0$ (z.B. $g^3 = g * g * g$), und $g^k := (g^{-1})^{-k}$ für $k < 0$, und $g^0 := e$.
Zeige, dass wenn $|G| = n < \infty$ ist, die Gruppe $(G, *)$ isomorph zur Gruppe $\{0, 1, ..., n-1\}$ mit der Operation $+$ aus dem letzten Übungsblatt ist.