Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 5:

Aufgabe 1: Sei $X = \{Merkel, Lindner, Nahles, Wagenknecht\}$, eine Menge mit vier Elementen.
a) Welche der folgenden fünf Relationen ist ein Äquivalenzrelation: $x \sim y$ genau dann wenn x und y mindestens
i) keinen, ii) einen, iii) zwei, iV) drei, V) vier
Buchstaben gemeinsam haben? b) Falls $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, was ist die Kardinalität von $X/_\sim$?

Aufgabe 2: Untersuche, ob eine Gruppe $(G, *)$ mit $|G| \leq 4$ immer abelsch ist. Hinweis: Schreibe die Gruppenelemente e, x_2, ..., x_n hin (mit $n = |G|$) und "spiele" die verschiedenen möglichen Operationen $* : G \times G \to G$ mit Hilfe der möglichen Gruppentafeln durch.

Aufgabe 3: a) Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere für $g, h \in G$, dass $g \sim h$ genau $g * h^{-1} \in U$. Entscheide, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine **Teilmenge**. Definiere wieder für $g, h \in G$, dass $g \sim h$ genau $g * h^{-1} \in U$. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation und für alle $g \in U$ gelte $e \sim g$. Entscheide, ob dann U automatisch eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4: Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und $G_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.
a) Seien $k, l \in G_n$. Zeige, dass es genau ein $r \in G_n$ gibt es, so dass $kl - r$ durch n teilbar ist? Hinweis: Unterscheide die Fälle, wo $0 \leq kl < n$, $n \leq kl < 2n$, $2n \leq kl < 3n$ usw. ist.
b) Definiere $k * l$ als das eindeutige $r \in G_n$, so dass $kl - r$ durch n teilbar ist. Untersuche, für welche $n \leq 7$ gilt:
- $k, l \in G_n - \{0\}$ impliziert $k * l \in G_n - \{0\}$, und falls das der Fall ist, ob
- die Menge $(G_n - \{0\}, *)$ eine Gruppe ist.