Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 6:

Aufgabe 1: Sei $(G,*)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere wie im letzten Blatt für $g,h \in G$, dass $g \sim h$ genau dann wenn $g * h^{-1} \in U$.

Zeige: a) Wenn G abelsch ist, ist die Abbildung

$$* : G/_\sim \times G_\sim \to G/_\sim,$$

die $([(g],[h])$ auf $[g*h]$ abbildet, wohldefiniert ist, d.h. wenn $g \sim g'$ und $h \sim h'$, dann ist $[g*h] \sim [g'*h']$.

b) Untersuche, ob $(G/_\sim, *)$ für G abelsch eine Gruppe ist.

Aufgabe 2: Sei $(G,*)$ eine Gruppe, in der für alle $x \in G$ gilt: $x = x^{-1}$. Zeigen Sie: $(G,*)$ ist abelsch.

Aufgabe 3: Seien $(G,*)$ und $(H,*)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:
a) $Kern(f) := \{g \in G \mid f(g) = e\}$ ist eine Untergruppe von G.
b) Das Bild von f ist eine Untergruppe von H.

Aufgabe 4: Seie $(G,*)$ eine Gruppe. Zu $g \in G$ definieren wir eine Abbidung

$$\varphi_g : G \to G,$$
$$h \mapsto g * h * g^{-1}.$$

Zeigen Sie:
a) φ_g ist ein Isomorphismus, insbeosndere bijektiv.
b) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$C : G \to SG,$$

$$g \mapsto \varphi_g$$

ist ein Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe der Menge G.
c) Sei nun G abelsch. Bestimmen Sie $Kern(C)$ und das Bild von C.