Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 7:

Aufgabe 1: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U_n := \{nm \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$.
a) Zeige, dass U_n eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.
b) Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ von Aufgabe 1 aus Blatt 6 (beachte, dass die Verknüpfung $*$ hier $+$ ist). Gib einen Isomorphismus (eine bijektive Abbildung f, so dass $f(x+y) = f(x) + f(y)$) von der Gruppe $(G_n, +)$ von Aufgabe 1, Blatt 3 (dort G genannt) auf die Gruppe $(\mathbb{Z}/_{\sim}, +)$ an.

Aufgabe 2: Sei p eine Primzahl. Zeige dass $(G_n, +, *)$ (wieder sei $(G_n, +)$ die Gruppe von Aufgabe 1, Blatt 3), wo $*$ die Multiplikation aus Aufgabe 4, Blatt 5 ist, ein Körper ist. Sie dürfen dabei folgende Tatsache verwenden: Wenn n und m teilerfremde natürlich Zahlen sind, gibt es ganze Zahlen k und l, so dass $kn + lm = 1$ist.

Aufgabe 3: Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper F_2. Zeige dass für jedes $v \in V$ gilt:

$$v + v = 0.$$

Aufgabe 4: Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $v + ... + v = 0$ (n Summanden) folgt, dass $v = 0$ ist.