Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 8:

Aufgabe: Betrachte die Untergruppe $\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{R}, +)$ und die Relation $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Z}$. Wir bezeichnen die Quotientenmenge $\mathbb{R}/_{\sim}$mit $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$.
a) Bezeiche $[0,1) := \{t \,|\, 0 \leq t < 1\}$. Zeige, dass die Abbildung $[0,1) \times [0,1) \to [0,1)$, die $(s,t)$ auf $s+t$ abbildet, falls $s+t<1$ ist, und auf $s+t-1$ sonst, diese Menge zu einer abelschen Gruppe macht.
b) Gib einen Isomorphismus von Gruppen $[0,1)$ auf $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ an.

Aufgabe 2: Eine bijektive lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen nennt man eine **Isomorphismus**. Sei $K$ ein Körper. Gib einen Isomorphismus vom $K$-Vektorraum $Abb(\{1, 2, ..., n\}, K)$ auf $K^n$ an.

Aufgabe 3: Sei $K$ ein Körper. Zeige, dass die Abbildung $f : K^{n+1} \to K^n$, die $(a_1, ..., a_{n+1})$ auf $(a_2, 2a_3, 3a_4, ......, na_{n+1})$ abbildet linear ist. Gib das Bild von $f$ unter der in der Vorlesung definierten Abbildung $g$ von den linearen Abbidungen auf die Matrizen an, welche einer linearen Abbildung die zugehörige Matrix zuordent.

Aufgabe 4: Sei $K$ ein Körper und $A$ eine $2 \times 2$-Matrix mit Koeffizienten $a_{i,j}$ in $K$ und $B$ eine $2 \times 2$-Matrix mit Koeffizienten $b_{i,j}$ in $K$. Seien $f_A$ und $f_B$ die zugehörigen linearen Abbildungen von $K^2$ nach $K^2$ (die Urbilder unter der in Aufgabe 3 erwähnten Abbildung $g$). Bestimme $g(f_b \cdot f_A)$, also die Matrix, die zur Komposition der beiden Abbildungen gehört.