Vorlesung Lineare Algebra, Übungsblatt 9:

Aufgabe 1: Sei K ein Körper und $f : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix $A(f)$: Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn es eine $n \times n$-Matrix B gibt, so dass

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und $f : K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix $A(f)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn

$$ad - bc \neq 0$$

ist. Hinweis: Wende Aufgabe 1 an.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $f : K^3 \to K^3$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix $A(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn

$$b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$$

ist.
Hinweis: Verwende das Kriterium von Aufgabe 1. Verwende Aufgabe 2 und betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2' & a_3' \\ 0 & b_2' & b_3' \\ 0 & c_2' & c_3'. \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} b_2' & b_3' \\ c_2' & c_3' \end{pmatrix}$$

so gewählt ist, dass das Produkt mit

$$\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 4: Sei $A = (a_{ij})$ eine 2×2-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine Lösung ungleich 0 in $\mathbb{R}^2$ hat, es auch eine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ungleich 0 mit $x_i \in \mathbb{Z}$ hat.