Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 17.04.2016
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Ein Ideal $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ heißt monomial, falls es von einer Menge erzeugt wird, die aus Monomen besteht. Zeigen Sie, dass für ein monomiales Ideal I die Monome in I eine k-Vektorraum Basis von I bilden.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei R ein Ring und $I \lhd R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ die Schnittmenge aller Primideale in R ist, die I enthalten.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass ein Polynom $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in k[x]$ genau dann nilpotent ist, wenn alle Koeffizienten nilpotent sind.

Übung 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von $V(x^2 - yz, xz - x) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass ein Polynom $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $a_0 \in R^\times$ und alle anderen Koeffizienten nilpotent sind.

Übung 6
Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Untermenge. Dann ist A irreduzibel (bezüglich der Unterraumtopologie) genau dann, wenn $\overline{A}$ es ist.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7
Sei X ein irreduzibler topologischer Raum und sei $\varnothing \neq U \subseteq X$ offen, dann ist U dicht in X.

Übung 8
Zeigen Sie, dass $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ für alle Ideale $I, J \lhd R$.

Übung 9
Seien $I, J \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Ideale. Zeigen Sie: $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

Übung 10
Seien $V, W \subset \mathbb{A}_k^n$ affine Varietäten. Zeigen Sie:

$$I(V \cap W) = \sqrt{I(V) + I(W)}.$$

Übung 11
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $I^m \subseteq J$ for eine ganze Zahl $m > 0$, so gilt $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(b) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

(c) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$, aber im Allgemeinen $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{I}\sqrt{J}$. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass das Produkt von Radikalidealen im Allgemeinen kein Radikalideal ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 25.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.