Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Definition 0.1 *Es sei $A \subseteq B$ ein Unterring. Ein element $b \in B$ heißt* ganz über A*, falls b die Nullstelle von einem normierten Polynom aus $A[X]$ ist. Falls jedes element $b \in B$ ganz über A ist, dann sagen wir, dass B* ganz über A ist*, oder dass B eine* ganze Erweiterung von A *ist.*

Übung 1 (Präsenz)
Es sei $b \in B$. Die folgenden Aussagen sind für b äquivalent.

(a) b ist ganz über A.

(b) $A[b]$ ist ein endlich erzeugter A-Modul (wobei $A[b]$ für den in B von A und b erzeugten Unterring steht).

(c) Es gibt einen Unterring $A \subseteq C \subseteq B$, der ein endlich erzeugter A-Modul ist und b enthält.

Übung 2 (Präsenz)
Es seien $b_1, \ldots, b_n \in B$ ganz über A, dann ist $A[b_1, \ldots, b_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul und ganz über A.

Übung 3 (Abgabe)
Die Untermenge $A'_B = \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ ist ein Unterring von B.

Definition 0.2 *(Verschwindungsordnung von Polynomen in mehreren Variablen) Sei $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $a \in \mathbb{A}^n_k$, m eine naturliche Zahl. Wir sagen f* verschwindet bei a mit Ordnung m*, falls*

$$\partial_\alpha f(a) = 0$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ with $|\alpha| < m$.
Hat man eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$, so sagt man f verschwindet auf X mit Ordnung m, falls es mit Ordnung m auf allen Punkten von X verschwindet. Wir setzen

$$\operatorname{ord}_X f := \max\{m \in \mathbb{N} \mid f \textit{ vanishes to order } m \textit{ along } X\} \ .$$

Übung 4 (Verschwindungsordnung, Präsenz)
Mit Notation wie oben, zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen mithilfe der multivariaten Taylor Formel.

(a) f verschwindet mit Ordnung m bei $p \in \mathbb{A}^n_k$.

(b) Falls $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} a_\alpha (x-p)^\alpha$, so ist $a_\alpha = 0$ für alle Multiindizes α with $|\alpha| < m$.

Übung 5 (Abgabe)
Es sei C ein Unterring von A. Falls B ganz über A und A ganz über C ist, dann ist auch B ganz über C. Falls ein Element $b \in B$ ganz über A'_B ist, dann gilt bereits $b \in A'_B$.

Übung 6 (Abgabe)
Es seien $A \subseteq B$ wie oben, $I \lhd B$. Dann lässt sich $A/I \cap A$ mit einem Unterring von B/I identifizieren. Falls B ganz über A ist, dann gilt auch B/I ganz über $A/I \cap A$.

Übung 7 (Übung) Zeigen Sie: jede affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$, die aus endlich vielen Punkten besteht, kann als Nullstellenmenge von n Polynomen geschrieben werden.

Übung 8 (Rechenregeln für ord_X, Abgabe)

(a) $\mathrm{ord}_X(f \cdot g) = \mathrm{ord}_X(f) + \mathrm{ord}_X(g)$.

(b) $\mathrm{ord}_X(f + g) \leq \min\{\mathrm{ord}_X(f), \mathrm{ord}_X(g)\}$.

(c) If $\partial_{x_i} f \neq 0 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, then $\mathrm{ord}_X(\partial_{x_i} f) = \max\{0, \mathrm{ord}_X(f) - 1\}$.