Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)

(a) Sei $R \neq 0$ ein graduierter Ring. Zeige: $1 \in R$ ist homogen vom Grad 0.

(b) Zeige: ein graduierter Ring ist genau dann ein Integritätsring, wenn für alle homogenen $f, g \in R$ mit $fg = 0$ gilt, dass $f = 0$ oder $g = 0$.

(c) Zeige: eine projektive Varietät X ist irreduzibel genau dann, wenn der Koordinatenring $S(X)$ ein Integritätsring ist.

Übung 2 (Übung)
$n+2$ Punkte in $\mathbb{P}^n$ seien in *allgemeiner Lage*, falls für jeweils $n+1$ von diesen deren Vertreter in K^{n+1} linear unabhängig sind.
Seien nun $a_1, \ldots, a_{n+2}$ und $b_1, \ldots, b_{n+2}$ zwei Mengen von Punkten in $\mathbb{P}^n$ in allgemeiner Lage. Zeige, dass es einen Isomorphismus $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, \ldots, n+2$ gibt.

Übung 3 (Abgabe)
Gebe projektive Varietäten X, Y an mit $X \cong Y$ aber $S(X) \ncong S(Y)$.

Übung 4 (Präsenz)
Seien $X, Y \in \mathbb{P}^n$ nichtleere projektive Varietäten. Man zeige:

(a) die Dimension des Kegels $C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ ist $\dim X + 1$;

(b) ist $\dim X + \dim Y \geq n$, so ist $X \cap Y \neq \varnothing$;

(c) $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \ncong \mathbb{P}^{m+n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

Übung 5 (Abgabe)
Sei $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ ein Morphismus. Zeige:

(a) ist $X \subset \mathbb{P}^m$ Nullstellenmenge eines einzigen homogenen Polynoms in $K[x_0, \ldots, x_m]$, so hat jede irreduzible Komponente von $f^{-1}(X)$ Dimension größer oder gleich $n-1$.

(b) ist $n > m$, so ist f konstant.

Übung 6 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, die als Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms vom Grad 3 gegeben ist. Sei weiterhin $U \subset X \times X$ die Menge aller $(a, b) \in X \times X$ mit $a \neq b$ und der Eigenschaft, dass die eindeutig bestimmte Gerade durch a und b die Kurve X in genau 3 verschiedenen Punkten schneidet. Zwei dieser Schnittpunkte sind a und b; den dritten bezeichnen wir mir $\psi(a, b) \in X$. Zeige, dass $U \subset X \times X$ offen ist und, dass $\psi : U \to X$ ein Morphismus ist.

Übung 7 (Übung)
Sei $a \in \mathbb{P}^n$ ein Punkt. Zeige, dass die Einpunktmenge $\{a\}$ eine projektive Varietät ist und bestimme Erzeuger für das Ideal $I_p(\{a\}) \triangleleft K[x_0, \dots, x_n]$.