Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Abgabe)
Sei $\widetilde{\mathbb{A}^3}$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^3$ in der Gerade $V(x_1, x_2) \cong \mathbb{A}^1$. Zeige, dass die exzeptionelle Menge isomorph zu $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist. Wann schneiden sich die strikten Transformationen von zwei Geraden in $\mathbb{A}^3$ durch $V(x_1, x_2)$ in der Aufblasung? Was ist demnach die geometrische Bedeutung der Punkte in der exzeptionellen Menge?

Übung 2 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und sei $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen, die sich gegenseitig nicht enthalten. Sei weiterhin $\widetilde{X}$ die Aufblasung von X im Ideal $I(Y_1) + I(Y_2)$. Zeige, dass die strikten Transformationen von Y_1 und Y_2 in $\widetilde{X}$ disjunkt sind.

Übung 3 (Präsenz)
Sei $I \triangleleft K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal mit der Eigenschaft, dass die korrespondierende affine Varietät $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ den Ursprung enthält. Betrachte die Aufblasung $\widetilde{X} \subset \widetilde{\mathbb{A}^n} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ in $x_1, \ldots, x_n$ und bezeichne die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^{n-1}$ mit $y_1, \ldots, y_n$.

(a) $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ kann durch affine Räume überdeckt werden, wobei eine Koordinatenumgebung davon folgende Gestalt hat

$$\mathbb{A}^n \to \widetilde{\mathbb{A}^n} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1},$$
$$(x_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto ((x_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_n), [1 : y_2 : \cdots : y_n]).$$

Zeige, dass auf dieser Koordinatenumgebung die Aufblasung $\widetilde{X}$ als die Nullstellenmenge der Polynome

$$\frac{f(x_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_n)}{x_1^{\min \deg f}}$$

für alle $0 \neq f \in I$, wobei $\min\deg f$ den kleinsten Grad einens Monoms in f bezeichnet.

(b) Zeige, dass die exzeptionelle Hyperfläche von $\widetilde{X}$

$$V_p(f^{\text{in}} \mid f \in I) \subset \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

ist, wobei f^{in} der initiale Term von f ist, das heißt die Summe aller Monome in f von kleinstem Grad. Aus diesem Grund ist der Tangentialkegel von X im Ursprung

$$C_0X = V_a(f^{\text{in}} \mid f \in I) \subset \mathbb{A}^n.$$

(c) Zeige im Fall $I = (f)$, dass $C_0X = V_a(f^{\text{in}})$. Zeige, dass jedoch für ein allgemeines Ideal I im allgemeinen C_0X nicht die Nullstellenmenge einer Menge von Erzeugern von I ist.

Übung 4 (Abgabe)
Sei $X = V(x_2^2 - x_1^2 - x_1^3 \subset \mathbb{A}^2)$. Zeige, dass X nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1$ ist, aber die Aufblasung von X im Ursprung es ist.

Übung 5 (Abgabe)

(a) Zeige, dass die Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ im Ideal (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) isomorph zur Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ im Ideal (x_1, x_2) ist.

(b) Sei X eine affine Varietät und sei $I \trianglelefteq A(X)$ ein Ideal. Gilt allgemein, dass die Aufblasung von X in I isomorph zur Aufblasung von X in $\sqrt{I}$ ist?

Übung 6 (Präsenz)
Sei $a = [1:0:0]$, $b = [0:1:0]$ und $c = [0:0:1]$ und sei $U = \mathbb{P}^2 \setminus \{a, b, c\}$. Betrachte die Cremona Abbildung

$$f : U \to \mathbb{P}^2, [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1].$$

(a) Zeige, dass f nicht zu einem Morphismus $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ fortgesetzt werden kann.

(b) Sei $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ die Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ in $\{a, b, c\}$. Zeige, dass f zu einem Isomorphismus $\tilde{f} : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ fortgesetzt werden kann.