Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Ein Vektorbündel vom Rang r (oder Geradenbündel im Fall $r = 1$) über einer algebraischen Varietät X ist eine algebraische Varietät F zusammen mit einem Morphismus $\pi : F \to X$, so dass eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch Zariski offene Teilmengen existiert mit:

(a) Für jedes $i \in I$ gibt es einen Isomorphismus $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^r$ mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ \psi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{A}^r \to U_i$ die Projektion auf die erste Komponente ist.

(b) Für alle $i, j \in I$ existiert eine offene affine Teilmenge $U \subset U_i \cap U_j$, auf der die Übergangsfunktionen $\psi_j^{-1} \circ \psi_i : U \times \mathbb{A}^r \to U \times \mathbb{A}^r$ gegeben ist durch $(x, v \mapsto (x, A_{ij}(x)v)$, wobei A_{ij} eine $(r \times r)$ Matrix ist, deren Einträge reguläre Funktionen auf U sind.

Zeige, dass gegeben Matrizen wie in (b) mit der Eigenschaft, dass A_{ii} die Identität ist und dass $A_{jk}A_{ij} = A_{ik}$, ein Vektorbündel existiert, dessen Übergangsmatrizen genau die $\{A_{ij}\}_{i,j \in I}$ sind.

Übung 2 (Präsenz)
Zeige:

(a) Jeder Morphismus $f : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$ kann zu einem Morphismus $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden.

(b) Nicht jeder Morphismus $f : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$ kann zu einem Morphismus $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden.

(c) Jeder Morphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^1$ ist konstant.

Übung 3 (Abgabe)

(a) Zeige, dass jeder Isomorphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ von der Form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ für gewisse $a, b, c, d \in K$ ist, wobei x eine affine Koordinate auf $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ sei.

(b) Zeige, dass gegeben drei verschiedene Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^1$ und drei verschiedene Punkte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{P}^1$ es einen eindeutigen Isomorphismus $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gibt mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Übung 4 (Übung)
Für affine Varietäten X, Y haben wir gesehen, dass es eine 1:1 Korrespondenz gibt

$$\{\text{Morphismen } X \to Y\} \leftrightarrow \{K\text{-Algebra Homomorphismen } \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)\}$$
$$f \mapsto f^* \ .$$

Gilt dies immer noch für

(a) X beliebige Prävarietät und Y affin?

(b) Y beliebige Prävarietät und X affin?

Übung 5 (Abgabe)
Zeige

(a) Jede Prävarietät ist noethersch als topologischer Raum.

(b) Ist $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ eine irreduzible Zerlegung einer Prävarietät X, so ist die lokale Dimension $\operatorname{codim}_X\{a\}$ von X bei einem Punkt $a \in X$ gegeben durch

$$\operatorname{codim}_X\{a\} = \max\{\dim X_i \mid a \in X_i\} \ .$$

(c) (a) wäre falsch, hätten wir eine Prävarietät als geringten Raum definiert, der eine beliebige (nicht notwendigerweise endliche) offene Überdeckung durch affine Varietäten hat.

Übung 6 (Übung)
Sei Y eine abgeschlossene Teilmenge einer Prävarietät X, aufgefasst als geringter Raum mit der Strukturgarbe

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_Y(U) := \{\varphi : U \to K \mid & \text{ für alle } a \in U \text{ gibt es eine offene Umgebung } V \text{ von } a \text{ in } X \\ & \text{ und } \psi \in \mathcal{O}_X(V) \text{ mit } \varphi = \psi \text{ auf } U \cap V\}\end{aligned}$$

für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$. Zeige, dass für alle offenen affinen Teilmengen $U \subset X$ der geringte Raum $U \cap Y$ (als offene Teilmenge des oben definierte geringten Raumes Y) isomorph zur affinen Varietät $U \cap Y$ ist.

Übung 7 (Abgabe)
Seien X, Y Prävarietäten. Zeige

(a) Sind X und Y Varietäten, so auch $X \times Y$.

(b) Sind X und Y irreduzibel so auch $X \times Y$.