Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie III

# Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

---

**Übung 1** Zeige die folgende Behauptung: Sei $A$ eine $R$-Algebra, $R \to R'$ ein Morphismus von Ringen und wir setzen $A' := A \otimes_R R'$. Dann induziert $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ durch tensorieren mit $R'$ über $R$ eine $R'$-Derivation

$$d_{A'/R'} : A' \to \Omega^1_{A/R} \otimes_A A',$$

und $(\Omega^1_{A/R} \otimes_A A', d_{A'/R'})$ ist der Modul der relativen Differentialformen auf $A'$ über $R'$. Insbesodere: $\Omega^1_{A'/R'} \cong \Omega^1_{A/R} \otimes_A A'$. Benutze für den Beweis die Beschreibung der relativen Differentiale über den Kern der Multiplikationsabbildung.

**Übung 2** Sei $k$ ein Körper und $A := k[t_1, t_2]/(t_2^2 - t_1^3)$. Zeige, dass $\Omega^1_{A/K}$ von zwei Elementen erzeugt wird, aber nicht frei ist. Schließe daraus, dass $\operatorname{Spec} A$ nicht isomorph zur affinen Geraden ist.

**Übung 3** Sei $A$ eine $R$-Algebra, $S \subset A$ ein multiplikativ abgeschlossenes System und $A_S$ die Lokalisierung von $A$ an $S$. Zeige, dass $\Omega^1_{A_S/R}$ durch $(\Omega^1_{A/R})_S$ gegeben ist und dass die Abbildung

$$d : A_S \to (\Omega^1_{A/R})_S, \quad \frac{f}{s} \mapsto \frac{s\, d_{A/R}(f) - f d_{A/R}(s)}{s^2}$$

das äußere Differential von $A_S$ über $R$ ist, wobei $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ das äußere Differential von $A$ ist. Schließe daraus, dass es einen Isomorphismus $\Omega^1_{A/R} \otimes_A A_S \cong \Omega^1_{A_S/R}$ gibt und dass insbesondere $\Omega^1_{A_S/A} = 0$.