Lineare Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 20.11.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0+0+0+4 Punkte)

1. Welche der folgenden Teilmengen sind $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathbb{R}^2$?
   - (i) $\{(0,0)\}$,
   - (ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$,
   - (iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$,
   - (iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$,
   - (v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$,
   - (vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$,
   - (vii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(2,1)\}$,
   - (viii) $\mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie alle Unterräume von $\mathbb{R}^2$ an.
3. Welche der folgenden Teilmengen sind $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathbb{R}^3$?
   - (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$,
   - (ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2 = 0\}$,
   - (iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$,
   - (iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$.
4. Sei V ein K-Vektorraum und seien U,W Unterräume. Zeigen Sie, dass gilt: $U \cup W$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$.

Übung 2 (4 Punkte)
Es sei $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq U_4 \ldots$ eine aufsteigende Kette von Unterräumen eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ein Unterraum von V ist.

Übung 3 (0+2+2 Punkte)

1. Sind die folgenden Vektoren $\mathbb{Q}$-linear abhängig oder $\mathbb{Q}$-linear unabhängig?
   - (i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$
   - (ii) $\begin{pmatrix} 10 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$
   - (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$.
2. Es sei $M \subseteq \mathbb{Q}^n$ eine (endliche) Menge von Vektoren. Angenommen diese Vektoren sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Sind sie dann auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig? Was ist mit der umgekehrten Implikation?

3. Es sei $M \subseteq \mathbb{Q}^n$ eine Menge von Vektoren, deren Koordinaten ganze Zahlen sind. Betrachten Sie nun den Körper mit zwei Elementen (Schreibweise: $\mathbb{F}_2$), der aus der Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit den Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, die durch die Verknüpfungstabellen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

gegeben sind, besteht. Betrachen Sie nun die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$, die gerade Zahlen auf 0 und ungerade Zahlen auf 1 abbildet. Damit lässt sich eine Abbildung $\psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{F}_2$ definieren indem man φ auf alle Komponenten anwendet.
Angenommen die Vektoren aus M sind linear unabhängig. Sind dann auch die Vektoren $\{\psi(u) \in \mathbb{F}_2^n \mid u \in M\}$ $\mathbb{F}_2$-linear unabhängig? Was ist mit der umgekehrten Implikation?

Übung 4 (0+2+2 Punkte)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie:

1. $\langle A \cap B \rangle_K \subseteq \langle A \rangle_K \cap \langle B \rangle_K$.
   Finden Sie außerdem ein Beispiel dafür, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt!
2. $\langle A \cup B \rangle_K = \langle \langle A \rangle_K \cup \langle B \rangle_K \rangle_K$.
3. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $U \neq V$, so ist $\langle V \setminus U \rangle_K = V$.

Übung 5 (Zusatzaufgabe)
Ungeradestadt hat die folgenden Regeln für die Gründung von Vereinen:

1. Jeder Verein muss eine ungerade Anzahl von Mitgliedern haben.
2. Für jedes Paar von Vereinen gibt es eine gerade Anzahl von Mitgliedern, die beiden Vereinen angehören.

Ungeradestadt habe n Einwohner. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Vereine, die nach den beiden Regeln gebildet werden können, kleiner oder gleich n ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 01.12.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.