Lineare Algebra

Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 01.12.2017
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \dots, v_n$ und sei $0 \neq w \in V$ beliebig. Zeigen Sie, dass es dann ein $1 \leq i_0 \leq n$ gibt, sodass das Tupel $w_1, \dots, w_n$ mit

$$w_i := \begin{cases} v_i & i \neq i_0 \\ w & i = i_0 \end{cases}$$

wieder eine Basis von V ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X hat die Struktur eines $\mathbb{F}_2$-Vektorraums (Definition von $\mathbb{F}_2$ ist auf dem letzten Blatt) auf die folgende Art und Weise: für $U, V \subseteq X$ setze man $U + V := (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Die Skalarmultiplikation mit $a \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ wird definiert durch $1 \cdot U := U, 0 \cdot U = \varnothing$.

1. Zeigen Sie, dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind.

2. Sei nun $X = \{1, \dots, n\}$ und sei V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathcal{P}(X)$. Wir setzen für $i = 1, \dots, n$
$$v_i := \{1, \dots, i\} \in V\,.$$
Zeigen Sie, dass $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist.

3. Seien X, V wie in Teilaufgabe 2. Geben Sie eine Basis $w_1, \dots, w_n$ von V an, für die
$$|w_1| + \dots + |w_n|$$
den minimal möglichen Wert annimmt, wobei $|v|$ die Anzahl der Elemente von $v \in V$ bezeichne.

Übung 3 (4 Punkte) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Für eine echt aufsteigende Folge

$$\{0\} \neq U_1 \subsetneq U_2 \dots \subsetneq U_n$$

von Unterräumen von V nennen wir n die Länge. Zeigen Sie die folgende alternative Beschreibung der Dimension:

$$\dim(V) := \sup\{n \mid \text{es gibt } \{0\} \neq U_1 \subsetneq U_2 \dots \subsetneq U_n \text{ Unterräume in } V\}.$$

Übung 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum der Folgen

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$$

die Dimension ∞ hat, das heißt kein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 08.12.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.