Lineare Algebra

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 15.12.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0+4 Punkte)

1. Welche der folgenden Paare von Unterräumen von $\mathbb{R}^3$ bilden eine direkte Summe? (mit Beweis)

   (a) $U_1 := \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

   (b) $U_1 := \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

   (c) $U_1 := \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

   (d) $U_1 := \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

2. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) $U_1 \oplus U_2 = V$.

   (b) $U_1 + U_2 = V$ und $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

   (c) $U_1 \cap U_2 = 0$ und $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Übung 2 (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $f^n := f \circ f \cdots \circ f$ für die n-fache Verkettung und wir setzen $f^0 := \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie:

1. Es gelten folgende Inklusionsketten:

$$0 = \mathrm{Kern}(f^0) \subseteq \mathrm{Kern}(f^1) \subseteq \mathrm{Kern}(f^2) \ldots$$
$$V = \mathrm{Bild}(f^0) \supseteq \mathrm{Bild}(f^1) \supseteq \mathrm{Bild}(f^2) \ldots$$

2. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft, dass $\text{Kern}(f^{n_0}) = \text{Kern}(f^{n_0+1})$ und $\text{Bild}(f^{n_0}) = \text{Bild}(f^{n_0+1})$ und für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft gilt sogar

$$\text{Kern}(f^{n_0}) = \text{Kern}(f^{n_0+r}) \text{ und } \text{Bild}(f^{n_0}) = \text{Bild}(f^{n_0+r}) \text{ für alle } r \in \mathbb{N}.$$

3. Für n_0 wie oben gilt $V = \text{Kern}(f^{n_0}) \oplus \text{Bild}(f^{n_0})$.

Übung 3 (1+1+1+1 Punkte - universelle Eigenschaft der (abstrakten) direkten Summe)
Seien V_1, V_2 zwei K-Vektorräume. Eine (abstrakte) direkte Summe von V_1 und V_2 ist ein K-Vektorraum V zusammen mit K-linearen Abbildungen

$$\iota_i : V_i \to V$$

für $i = 1, 2$, sodass zu jedem K-Vektorraum T und je zwei linearen Abbildungen $f_i : V_i \to V$, $i = 1, 2$ genau eine lineare Abbildung

$$F : V \to T$$

existiert mit

$$f_i = F \circ \iota_i$$

für $i = 1, 2$. Zeigen Sie:

1. Zu je zwei K-Vektorräumen V_1, V_2 gibt es eine (abstrakte) direkte Summe.

2. Je zwei abstrakte direkte Summen zu K-Vektorräumen V_1 und V_2 sind isomorph.

3. Eine konkrete Konstruktion einer (abstrakten) direkten Summe ist wie folgt: wir definieren zuerst

$$V_1 \oplus V_2 := V_1 \times V_2$$

als Menge. Dann definieren wir die Addition von Tupeln durch

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

für alle $x_i, y_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Schließlich definieren wir für $\lambda \in K$ die Skalarmultiplikation

$$\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)\,.$$

4. Sind U_1, U_2 zwei Unterräume von V und ist ihre Summe $U_1 \oplus U_2 = U_1 + U_2$ eine innere direkte Summe, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus
$$U_1 \oplus U_2 \xrightarrow{\cong} U_1 + U_2\,,$$
der in der Konstruktion der direkten Summe als Vektorraum der Paare die Form
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$
hat. Das heißt: innere direkte Summen sind auch abstrakte direkte Summen.

Übung 4 (2+2 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum. Ein Projektor ist eine lineare Abbildung $P : V \to V$ mit $P \circ P = P$.

1. Zeigen Sie: $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \pi &:= \mathrm{id}_V - P \\ x &\mapsto x - P(x) \end{aligned}$$
ein Projektor ist.

Übung 5 (Zusatzaufgabe)
Seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume. Eine Folge von Abbildungen
$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$
heißt exakt, falls $\mathrm{Bild}(f_k) = \mathrm{Kern}(f_{k+1})$ für alle $0 \leq k \leq n-1$. Beweisen Sie, dass in diesem Fall
$$\sum_{n=1}^{n} (-1)^n \dim(V_n) = 0$$
gilt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 08.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.