Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie II

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Abgabe)

- Sei X eine Varietät über K und $D \subset X$ ein Primdivisor. Da X irreduzibel ist gilt $K(X) = K(U)$ für $\varnothing \neq U \subset X$ offen. Zeigen Sie: gilt $U \cap D \neq \varnothing$, so gilt $\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{U,U\cap D}$.
- Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings R und sei $R_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von R an der multiplikativen Teilmenge $R \smallsetminus \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist und dass dessen maximales Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \subset R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Übung 2 (Abgabe)
Seien D und E Weil Divisoren auf eine normalen Varietät. Zeigen Sie:

- Sind D und E Cartier, so sind auch $D + E$ und $-E$ Cartier.
- Ist $D \sim E$, so ist D Cartier genau dann, wenn E Cartier ist.

Übung 3 (Abgabe)
Zeigen Sie, dass die Einschränkung $D \mapsto D\,|_U$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ induziert.

Übung 4 (Abgabe)
Sei D ein Weil Divisor auf einer normalen Varietät X. Zeige, dass D folgendermaßen eine Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln definiert:

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K(X)^* \mid (\mathrm{div}(f) + D)\,|_U \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Übung 5 (Präsenz)
Sei R ein noetherscher normaler Integritätsbereich. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) R ist ein UFD.

(b) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}\, R) = 0$.

(c) Jedes Primideal der Kodimension 1 ist ein Hauptideal.

Übung 6 (Präsenz)
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Integritätsbereich der Dimension 1. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}$ genau dann ein Hauptideal ist, wenn $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring ist.

Übung 7 (Übung)
Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe DVRs sind, indem Sie eine geeignete diskrete Bewertung auf dem jeweiligen Quotientenkörper angeben.

- $R = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \gcd(b, p) = 1\}$, wobei p eine feste Primzahl ist.
- $R = \mathbb{C}\{\{z\}\}$, der Ring der Potenzreihen in z mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, die einen positiven Konvergenzradius haben.

Übung 8 (Übung)
Wiederholen Sie das Material über DVRs aus den vorhergehenden Vorlesungen, zum Beispiel indem Sie Kapitel 12 im kommutativen Algebra Skript von Andreas Gathmann durchlesen.