Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie II

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Abgabe)
Zeigen Sie: $x^2 + y^2 = z^2$ in $\mathbb{A}^3$ ist nicht glatt aber normal.

Übung 2 (Abgabe)
Zeigen Sie:

(a) Sei $g : Y \to X$ eine endlicher birationaler Morphismus von Varietäten. Dann existiert eine Morphismus $h : X^\nu \to Y$, wobei hier X^ν die Normalisierung von X bezeichne, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X^\nu \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(b) Sei $g : Y \to X$ ein Morphismus von Varietäten, $g(Y)$ dicht in X und Y normal. Dann existiert ein Morphismus $h : Y \to X^\nu$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^\nu \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Übung 3 (Abgabe)
Sei X eine affine Varietät und K eine endliche Erweiterung von $k(X)$. Zeigen Sie, dass es dann eine affine Varietät Y und einen Morphismus $f : Y \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- f ist endlich
- Y ist normal
- $k(Y) = K$, wobei $f^* : k(X) \hookrightarrow k(Y) = K$ die gebene Inklusion ist.

Zeigen Sie, dass Y durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist. Man nennt Y die Normalisierung von X in K.

Übung 4 (Abgabe)
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang. Wir definieren nun den dualen $\mathcal{O}_X$-Modul von $\mathcal{E}$ durch $\check{\mathcal{E}} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.
Zeigen Sie:

(a) $(\check{\mathcal{E}})\check{} \cong \mathcal{E}$.

(b) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong \check{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

(c) Für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F},\mathcal{G}$ ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F},\mathcal{G}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$.

(d) (Projektionsformel) Ist $f:(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von geringten Räumen, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Rang, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$.

Übung 5 (Präsenz)
Zeigen Sie, dass eine affine irreduzible Varietät eine Normalisierung besitzt, die wieder affin ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Normalisierung eindeutig ist.

Übung 6 (Präsenz)
Sei X eine affine Varietät, M ein $k[X]$-Modul und sei $\tilde{M}$ die zu M assoziierte Garbe auf X. Man zeige:

(a) $\tilde{M}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

(b) Für alle Primideale $\mathfrak{p} \in k[X]$ ist der Halm $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$ der Garbe $\tilde{M}$ bei $\mathfrak{p}$ isomorph zu $M_{\mathfrak{p}}$.

(c) Für alle $f \in k[X]$ ist der $k[X]_f$-Modul $\tilde{M}(D(f))$ isomorph zu M_f.

(d) Insbesondere ist $\Gamma(X,\tilde{M}) = M$.

Übung 7 (Präsenz)
Seien X,Y affine Varietät und $f:Y \to X$ ein Morphismus. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $M \to \tilde{M}$ ist eine exakter, volltreuer Funktor von der Kategorie der $k[X]$-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln.

(b) Sind M,N zwei $K[X]$-Moduln so gilt $(M \otimes_{k[X]} N)\tilde{} \cong \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$.

(c) Ist $\{M_i\}$ eine Familie von $k[X]$-Moduln, so gilt $(\bigoplus M_i)\tilde{} \cong \oplus \tilde{M}_i$

(d) Für einen $k[Y]$-Modul N gilt $f_*(\tilde{N}) \cong ({}_{k[X]}N)\tilde{}$ wobei ${}_{k[X]}N$ N aufgefasst als $k[X]$-Modul ist.

(e) Für einen $k[X]$-Modul M gilt $f^*(\tilde{M}) \cong (M \otimes_A B)\tilde{}$

Übung 8 (Übung)
Sei R ein regulärer lokaler Ring. Man zeige, dass dann R faktoriell ist.

Übung 9 (Übung)
Zeigen Sie: sei X eine glatte Varietät, dann ist $\mathcal{O}_{X,P}$ ist regulär für jeden (abgeschlossenen) Punkt $P \in X$.