Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie II

Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Abgabe)
Sei D ein Weil-Divisor auf einer normalen algebraischen Varietät X. Zeigen Sie, dass die Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist.

Übung 2 (Abgabe)
Sei X eine Varietät (beziehungsweise ein noethersches Schema) und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Man betrachte die Funktion

$$\varphi(x) := \dim_{k(X)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x),$$

wobei $k(x) := \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ der Restklassenkörper im Punkt x ist. Benutzen Sie das Nakayama Lemma um die folgenden Aufgaben zu zeigen:

(a) φ ist oberhalbstetig, das heißt die Menge $\{x \in X \mid \varphi(x) \geq n\}$ ist abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Ist $\mathcal{F}$ lokal frei (und X zusammenhängend), so ist φ konstant.

(c) Umgekehrt ist φ konstant (und X reduziert), so ist $\mathcal{F}$ lokal frei.

Übung 3 (Abgabe)
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Man definiert die Tensor Algebra $T(\mathcal{F})$, symmetrische Algebra $S(\mathcal{F})$ und äußere Algebra $\Lambda(\mathcal{F})$ (und deren Komponenten $T^r(\mathcal{F})$, $S^r(\mathcal{F})$, $\Lambda^r(\mathcal{F})$) von $\mathcal{F}$ jeweils als die Garbe zur Prägarbe, die jeder offenen Menge U die jeweilige Tensoroperation angewendet auf $\mathcal{F}(U)$ als $\mathcal{O}_X(U)$-Modul zuordnet. Auf diese Weise bekommt man $\mathcal{O}_X$-Algebren, deren Komponenten für jeden Grad $\mathcal{O}_X$-Moduln sind. Zeigen Sie:

(a) Sei $\mathcal{F}$ lokal frei von Rang n. Dann sind $T^r(\mathcal{F})$, $S^r(\mathcal{F})$ und $\Lambda^r(\mathcal{F})$ auch lokal frei von Rang n^r, $\binom{n+r-1}{n-1}$ und $\binom{n}{r}$.

(b) Sei wieder $\mathcal{F}$ lokal frei von Rang n. Dann ist die Multiplikationsabbildung $\Lambda^{n-r}\mathcal{F} \otimes \Lambda^n\mathcal{F} \to \Lambda^n\mathcal{F}$ eine perfekte Paarung für alle r, insbesondere gilt im Fall $\mathcal{F}$ hat Rang 2, dass $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \Lambda^2\mathcal{F}$.

(c) Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine exakte Folge lokal freier Garben. Zeigen Sie, dass es dann für jedes r eine endliche Filtrierung von $S^r(\mathcal{F})$ gibt,

$$S^r(\mathcal{F}) = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^r \supset F^{r+1} = 0,$$

mit Quotienten

$$F^p/F^{p+1} \cong S^p(\mathcal{F}') \otimes S^{r-p}(\mathcal{F}'').$$

(Ab hier Übung)

(d) Dieselbe Aussage wie in (c) mit äußeren Potenzen statt symmetrischen Potenzen.

(e) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von geringten Räumen und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann kommutiert f^* mit allen Tensoroperationen auf $\mathcal{F}$, das heißt $f^*(S^n(\mathcal{F})) = S^n(f^*\mathcal{F})$ etc.

Übung 4 (Präsenz)
Sei X eine algebraische Varietät (bzw. noethersches Schema) und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe. Man zeige:

(a) Ist der Halm $\mathcal{F}_x$ ein lokal freier $\mathcal{O}_x$-Modul für einen Punkt $x \in X$, so existiert eine Umgebung U von x, sodass $\mathcal{F}_U$ frei ist.

(b) $\mathcal{F}$ ist lokal frei genau dann, wenn die Halme $\mathcal{F}_x$ freie $\mathcal{O}_x$-Moduln sind für alle $x \in X$.

(c) $\mathcal{F}$ ist eine invertierbare Garbe (also lokal frei von Rang 1) genau dann, wenn es eine kohärente Garbe $\mathcal{G}$ gibt mit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$ (daher 'invertierbar').

Übung 5 (Präsenz)
Sei X ein affines Schema, $f \in A$, sei $D(f) \subset X$ die korrespondierende offene Teilmengen und sei $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Man zeige

(a) Ist $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $f\,|_{D(f)} = 0$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n s = 0$.

(b) Sei $t \in \mathcal{F}(D(f))$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass $f^n t$ sich zu einem globalen Schnitt von $\mathcal{F}$ auf X fortsetzen lässt.

Übung 6 (Präsenz)

(a) Sei X eine Varietät (bzw. ein Schema). Dann ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul genau dann quasikohärent, wenn es für alle affinen offenen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ einen A-Modul M gibt mit $\mathcal{F}\,|_U \cong \tilde{M}$. (Für X noethersch:) $\mathcal{F}$ ist kohärent genau dann, wenn man für M einen endlich erzeugten A-Modul nehmen kann.

(b) Sei X eine algebraische Varietät. Zeigen Sie: eine Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann kohärent, wenn es eine Überdeckung von X durch offene Mengen $U_i, i \in I$ gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i}$ kohärent ist für alle $i \in I$.

Übung 7 (Übung)
Zeigen Sie: ist X eine affine Varietät, $Y \subset X$ die abgeschlossene Teilmenge definiert durch ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und ist $i : Y \to X$ die Inklusion, so ist $i_*\mathcal{O}_Y$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.