Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie II

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: M. Nickel

Übung 1 Beweisen Sie, dass die Garbe der Schnitte eines Vektorbündels lokal frei ist.

Übung 2 Zeigen Sie: $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ definiert eine Garbe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, die quasikohärent ist, wenn $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ es sind.

Übung 3 Die Grassmannsche $\mathbb{G}(1,3)$ ist definiert als der Raum der Geraden in $\mathbb{P}^3$ oder äquivalent als der Raum der 2-dimensionalen Unterräume von $V = \mathbb{C}^4$. Ein Punkt von $\mathbb{G}(1,3)$ korrespondiert zu einer Matrix von vollem Rang

$$p = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

die bis auf Multiplikation von links mit einem Element von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eindeutig ist. Man definiere

$$V \subset \mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{C}^4$$

als die Paare $(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, v)$ mit $v \in \mathrm{Span}(\alpha, \beta)$.

(a) Ein Paar $(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, v)$ ergibt eine 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, v)$ ein Punkt von V ist genau dann, wenn die maximalen Minoren von A verschwinden. Damit ist $V \subset \mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{C}^4$ eine abgeschlossene Untervarietät.

(b) Zeigen Sie, dass die Projektion auf den ersten Faktor $\pi : V \to \mathbb{G}(1,3)$ ein Morphismus ist und dass die Faser von π bei $p \in \mathbb{G}(1,3)$ ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}^4$ ist.

(c) Gegeben $0 \leq i < j \leq 3$ definiere

$$U_{ij} = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{G}(1,3) \mid \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i \neq 0\}.$$

Man zeige, dass $U_{ij} \cong \mathbb{C}^4$ und dass U_{ij} eine affine Überdeckung von $\mathbb{G}(1,3)$ ergeben.

(d) Gegeben $0 \leq i < j \leq 3$, seien $k < l$ die komplementären Indizes, sodass $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $(p, v) \mapsto (p, v_k, v_l)$ einen Isomorphismus

$$\pi^{-1}(U_{ij}) \cong U_{ij} \times \mathbb{C}^2$$

liefert.

(e) Nach der vorigen Aufgabe ist V ein Vektorbündel über $\mathbb{G}(1, 3)$. Bestimmen Sie die Übergansfunktionen.

Übung 4 Man zeige, dass jeder effektive Divisor, der linear äquivalent zu einem Cartier Divisor D ist, der Divisor der Nullstellen eines globalen Schnittes von $\mathcal{O}_X(D)$ ist.

Übung 5 Sei $\nu_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ die Veronese Abbildung. Zeigen Sie, dass $\nu_d^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$.

Übung 6 Sei $f : Z \to X$ ein Morphismus und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, das von globalen Schnitten erzeugt ist. Beweisen Sie, dass $f^*\mathcal{L}$ von globalen Schnitten erzeugt ist.

Übung 7 Sei D ein Cartier Divisor auf einer vollständigen normalen Varietät X.

(a) $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \smallsetminus \{0\}$ liefern effektive Divisoren $D + \mathrm{div}(f)$, $D + \mathrm{div(g)}$ auf X. Man beweise, dass diese Divisoren gleich sind genau dann, wenn $f = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

(b) Das vollständige Linearsystem von D ist definiert als

$$|D| := \{E \in \mathrm{CDiv(X)} \mid E \sim D, E \geq 0\}\,.$$

Damit besteht $|D|$ aus allen effektiven Cartier Divisoren auf X, die linear äquivalent zu D sind. Man benutze (a) um zu zeigen, dass $|D|$ mit dem projektiven Raum von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ identifiziert werden kann, das heißt es gibt eine natürliche Bijektion

$$|D| = \mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))) = (\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \smallsetminus \{0\})/\mathbb{C}^*\,.$$

(c) Nehmen Sie an, dass D keine Basispunkte hat und setzen $W = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Dann kann $\mathbb{P}(W^\vee)$ identifiziert werden mit der Menge der Hyperebenen in $\mathbb{P}(W) = |D|$. Zeigen Sie, dass der Morphismus $\varphi_{\mathcal{O}_X(D),W} : X \to \mathbb{P}(W^\vee)$ gegeben ist durch

$$\varphi_{\mathcal{O}_X(D),W} = \{E \in |D| \mid p \in \mathrm{Supp}(E)\} \subset |D|.$$