Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie II

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 Beweisen Sie, dass für eine normale Varietät X und Cartier-Divisoren D, E auf X gilt, dass $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(E) \simeq \mathcal{O}_X(D+E)$ und darüber hinaus $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(E), \mathcal{O}_X(D+E))$.

Übung 2 Definieren Sie Cartier-Divisoren für beliebige Varietäten X und zeigen Sie, dass für zwei Cartier-Divisoren D, E gilt $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(E)$ genau dann, wenn D und E linear äquivalent sind.

Übung 3 Sei k algebraisch abgeschlossen und X eine normale abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n_k$. Für einen Divisor $D = \sum n_i Y_i$ auf X definiert man den Grad von D als $\sum n_i \deg Y_i$, wobei $\deg Y_i$ der Grad von Y_i sei (aufgefasst als Untervarietät von $\mathbb{P}^n_k$).

(a) Sei V eine irreduzible Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$, die X nicht enthält, und sei Y_i eine irreduzible Komponente von $V \cap X$. Diese haben alle Kodimension 1 (Hartshorne 1, Ex. 1.8.). Für alle i sei f_i eine lokale Gleichung für V auf einer offenen Menge $U_i \subset \mathbb{P}^n$, für die $Y_i \cap U_i \neq \emptyset$ gilt, und sei $n_i = v_{Y_i}(f_i \,|_{U_i \cap X})$. Man definiere nun den Divisor $V.X$ als $\sum n_i Y_i$. Man zeige, dass man so durch lineare Fortsetzung einen wohldefinierten Homomorphismus von der Untergruppe von $\mathrm{Div}(\mathbb{P}^n)$ der Divisoren, deren Komponenten nicht X enthalten in $\mathrm{Div}(X)$ bekommt.

(b) Zeigen Sie, dass für einen Hauptdivisor D auf $\mathbb{P}^n$ der Divisor $D.X$ wie oben ein Hauptdivisor auf X ist. Damit bekommt man einen Homomorphismus $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Cl}(X)$

(c) Zeigen Sie, dass die ganze Zahl n wie in Teilaufgabe (a) genau die Schnittvielfachheit $i(X, V; Y_i)$ ist und benutzen Sie den Satz von Bézout um zu zeigen, dass für jeden Divisor D auf $\mathbb{P}^n$, dessen Komponenten X nicht enthalten

$$\deg(D.X) = \deg(D)\deg(X)$$

gilt.

(d) Sei D ein Hauptdivisor auf X. Man zeige, dass es eine rationale Funktion f auf $\mathbb{P}^n$ gibt mit $D = (f).X$. Man schließe damit, dass $\deg(D) = 0$. Somit definiert deg einen Homomorphismus $\deg : \mathrm{Cl}(X) \to \mathbb{Z}$. Zeigen Sie weiterhin, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, "deg"] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[d, "deg"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot\deg(X)"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd},$$

insbesondere ist $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Cl}(X)$ injektiv.

Übung 4 Sei V eine projektive normale Varietät in $\mathbb{P}^n$ der Dimension ≥ 1. Sei $X = C(V)$ der affine Kegel von über V in $\mathbb{A}^{n+1}$ und sei $\bar{X}$ dessen projektiver Abschluss in $\mathbb{P}^{n+1}$. Sei $P \in X$ der Scheitelpunkt des Kegels.

(a) Sei $\pi : \bar{X} \setminus P \to X$ die Projektion. Zeigen Sie, dass V überdeckt wird von offenen Teilmengen U_i mit $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{A}^1$ für alle i und zeigen Sie, dass $\pi^* : \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{Cl}(\bar{X} \setminus P)$ ein Isomorphismus ist. Wegen $\mathrm{Cl}(\bar{X}) \simeq \mathrm{Cl}(\bar{X} \setminus P)$ hat man damit $\mathrm{Cl}(V) \simeq \mathrm{Cl}(\bar{X})$.

(b) Wir haben $V \subset \bar{X}$ als Hyperebenenschnitt bei unendlich. Man zeige, dass die Klasse von V in $\mathrm{Cl}(\bar{X})$ genau $\pi^*([V.H])$ ist, wo H irgendeine Hyperebene von $\mathbb{P}^n$ sei, die V nicht enthalte. Man folgere, dass es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{Cl}(X) \to 0$$

gibt, wobei die erste Abbildung durch $1 \mapsto V.H$ und die zweite durch π^* verkettet mit der Einschränkung auf $X \setminus P$ und der Inklusion in X gegeben ist.

(c) Sei $S(V)$ der homogene Koordinatenring von V (das ist auch der affine Koordinatenring von X). Zeigen Sie, dass $S(V)$ ein UFD ist genau dann, wenn V projektiv normal und $\mathrm{Cl}(V) \simeq \mathbb{Z}$ ist und $\mathrm{Cl}(V)$ durch $V.H$ erzeugt wird.

(d) Sei $\mathcal{O}_P$ der lokale Ring von X bei P. Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung einen Isomorphismus $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p))$ induziert.