Grundlagen der Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 03.05.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)

1. Die Gruppe $\mathbb{R}^\times$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge
$$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t,(x,y)) \mapsto (tx, \frac{y}{t})\,.$$
Geben Sie die Bahnen und Stabilisatoren bezüglich dieser Gruppenoperation an.

2. Sei G eine Gruppe. Man zeige, dass die Abbildung $\mathbb{Z} \times G \to G$, die durch $(n, g) \mapsto g^n$ für $n \in \mathbb{Z}, g \in G$ definiert ist, im Allgemeinen keine Gruppenoperation ist.

Übung 2 (1+3 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert als
$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ für alle } g \in G\}\,.$$

1. Zeigen Sie: $Z(G)$ ist ein Normalteiler in G.

2. Berechnen Sie $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ für einen Körper K.

Übung 3 (2+2 Punkte)
Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Gruppen zyklisch sind:
(a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Übung 4 (2+2 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Es existiert ein $g \in G$ mit $g \neq e$ und $g^2 = e$.
(Man betrachte hierfür die Bahnenformel für die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$, die man als Operation von der Gruppe $\{\pm 1\}$ auf G interpretiert)

2. Für alle $g \in G$ gibt es ein $h \neq g^{-1}$ mit $hgh = g^{-1}$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 10.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.