Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 20.05.2019

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
An welchen Punkten der Kurve $X = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2$ ist die rationale Funktion y/x regulär? Zeigen Sie, dass $y/x \notin k[X]$, aber eine Potenz davon ist regulär.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei X eine irreduzible affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, $U \subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge. Eine rationale Funktion $\Phi \in k(X)$ heißt regulär auf U, falls sie an jedem Punkt $P \in U$ definiert ist. Die k-Algebra von allen solchen Funktionen wird mit $\mathcal{O}_X(U)$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ als Teilmengen von $k(X)$.

(b) Beweisen Sie, dass $\Phi \in k(X)$ regulär auf U genau dann, wenn für alle $P \in U$ eine offene Teilmenge $P \in V \subset U$ und Polynome $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ existieren, sodass

- $g(Q) \neq 0$ für alle $Q \in V$,
- $\Phi(Q) = f(Q)/g(Q)$ für alle $Q \in V$.

Übung 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,0)\})$.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ eine irreduzible affine Varietät, $P \in V$. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen Primidealen von $\mathcal{O}_{V,P}$ und den irreduziblen Untervarietäten von V, die P enthalten, gibt.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
An welchen Punkten des Kreises $V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ ist die rationale Funktion $\Phi = \frac{y-1}{x}$ regulär?

Übung 6
Bestimmen Sie das Bild der regulären Abbildung $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2, f(x,y) = (x, xy)$ und beschreiben Sie es topologisch.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7
Seien I, J Ideale in R. Zeigen Sie, dass $(I : J) = (I : \sqrt{J})$. Gilt auch $(I : J) = (\sqrt{I} : J)$

Übung 8
Sei $\Phi : V \to W$ eine reguläre Abbildung zwischen irreduziblen affinen Varietäten und sei $P \in V$ und $Q = \Phi(P) \in W$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi^* : k[W] \to k[V]$ einen k-Algebren Homomorphismus $\Phi^* : \mathcal{O}_{W,Q} \to \mathcal{O}_{V,P}$ induziert.

(b) Zeigen Sie $\Phi^*(\mathfrak{m}_{W,Q}) \subset \mathfrak{m}_{V,P}$.

(c) Entscheiden Sie, ob sich Φ^* stets nach $k(W)$ erweitern lässt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 28.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.