Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 11.06.2019

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass $R/\mathfrak{m}^n$ für alle $n \geq 1$ ein lokaler Ring ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie: jeder Unterring von $\mathbb{Q}$ ist eine Lokalisierung von $\mathbb{Z}$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei R ein Ring und $(R[X])_S$ die Lokalisierung von R am multiplikativen System $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass $(R[X])_S$ der Ring der Laurentpolynome mit Koeffizienten in R ist, das heißt der Ring aller formalen Ausdrücke $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ mit $a_i \in R$ und $a_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{Z}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Übung 4 (4 Punkte)
Gegeben Sei der Polynomring $R[\Xi]$ in einer Familie von Variablen Ξ über einem Ring R und eine multiplikative Teilmenge $S \in R$. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $(R[\Xi])_S \xrightarrow{\sim} R_S[\Xi]$ gibt.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $Q(R/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ gibt, wobei $Q(R/\mathfrak{p})$ den Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ bezeichne.

Übung 6
Zeigen Sie, dass eine Lokalisierung eines faktoriellen Rings wieder faktoriell ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 18.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.