Probeklausur Elementarmathematik I
L2M-EM/L5M-EM

Wintersemester 2019/2020

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. A. Küronya
F. Göbler

20.01.2020

Dauer: 103 Minuten

Hilfsmittel: Einen einseitig, handschriftlich beschriebenen DIN A4 Zettel.

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte hinreichend.

Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.

Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[20 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen(jeweils 4 Punkte).

1. Die Aussage

$$(A \vee B) \iff (A \vee \neg A \vee B \vee \neg B)$$

   ist eine Tautologie.

2. Gegeben seien die Aussageformen $T(x) =$ „Die natürliche Zahl x ist durch 7 teilbar“ und $S(x) =$ „Die natürliche Zahl x ist eine Quadratzahl“. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen:

$$\forall x \; \forall y : \quad T(x) \wedge T(y) \Longrightarrow S(xy). \tag{1}$$

$$\forall x : \quad T(x) \vee S(4) \iff \neg S(4x). \tag{2}$$

3. Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und $Y \subseteq B, X \subseteq A$. Dann gilt

$$f(f^{-1}(Y)) = Y. \tag{3}$$

$$f^{-1}(f(X)) = X. \tag{4}$$

4. Sei $A = \{1, 2, a, b\}$ und $B = \{2, c, d\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Menge

$$\mathcal{P}\big((A \setminus B) \cup \{3\}\big).$$

5. Die folgende Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+2)}{2}.$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]

a) [4 Punkte] Berechnen Sie die Wahrheitstafel zu der logischen Aussage

$$(A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge (B \vee C) \iff (A \vee B \vee C).$$

b) [6 Punkte] Betrachten Sie die folgenden Aussageformen:

$$T(x) = \text{„}x \text{ ist eine gerade Zahl“}.$$
$$S(x) = \text{„}x \text{ ist eine Quadratzahl“}.$$
$$Q(x, y) = \text{„}x \text{ ist durch } y \text{ teilbar“}.$$

Was ist der Wahrheitswert von

$$T(x) \wedge S(x) \implies Q(x, 4)?$$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

1. [3 Punkte] Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. [3 Punkte] Seien $A = C = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d, e\}$. Dann existieren f und g, sodass g nicht injektiv ist aber $g \circ f$ schon (Hinweis: Geben Sie dazu f und g **explizit** an).
3. [4 Punkte] Seien $A = B = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Dann gilt:
   f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f ist surjektiv.

Aufgabe 5

[10 Punkte]

In einem Tanzverein mit 50 Mitgliedern werden die drei Disziplinen Klassisch, Latin und Rock'n Roll angeboten. Die Disziplinen Klassisch und Rock'n Roll betreiben jeweils 22 Mitglieder. Nur die Latin Disziplin betreiben 10.38 Mitglieder betreiben Rock'n Roll und/oder Latin. Alle drei Disziplinen betreibt ein Mitglied. Genau in zwei Disziplinen aktiv sind 26 Mitglieder. Bestimmen Sie die Anzahl Mitglieder, welche genau eine Disziplin betreiben. Gehen Sie davon aus, dass jedes Mitglied mindestens eine Disziplin betreibt.