Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
8. November 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, falls

- $f\colon (R,+) \to (S,+)$ ein Gruppenhomomorphismus ist,
- für alle $a, b \in R$ gilt: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ und
- $f(1) = 1$.

Wir bezeichnen $f^{-1}(0)$ als *Kern* des Ringhomomorphismus f.

(a) Sei R ein beliebiger Ring.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$.

(b) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ an.

(c) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ an.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir bezeichnen mit $R^\times \subseteq R$ die Teilmenge der bzgl. Multiplikation invertierbaren Elemente.

(a) Zeigen Sie: $(R^\times, \cdot)$ ist eine Gruppe.

(b) Zeigen Sie: Es gibt ein $a \in \mathbb{F}_4$, so dass $\mathbb{F}_4^\times = \{a, a^2, a^3\}$.

(c) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie $K[X]^\times$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[X]^\times$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Seien $R \subseteq S$ kommutative Ringe.

Zeigen Sie: Für $s \in S$ ist die Auswertungsabbildung

$$E_s\colon R[X] \to S, \quad f \mapsto f(s)$$

ein Ringhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ ist ein Körper (bezüglich der Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{C}$).

(c) Geben Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[i]$ an.

Ist dieser Ringhomomorphismus injektiv?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wir definieren die *oberen Dreiecksmatrizen*

$$\Delta(n) \coloneqq \{A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K) : a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}.$$

Zeigen Sie: $\Delta(n) \subseteq \mathrm{Mat}_n(K)$ ist ein (Unter-)Ring.

(b) Finden Sie ein Element $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$, so dass $A \neq 0$, aber $A^2 = 0$.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 14. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.