german

Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
16. Oktober 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 0

Diese Aufgaben müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen in den Tutorien der KW 43. bearbeitet werden.

Aufgabe 0

Wir definieren die *Menge der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ als

$$\big\{(x, y)\big|x, y \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^2$$

und darauf die Operationen

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) &\longmapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) &\longmapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \ . \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ die Axiome eines Körpers erfüllt.

Aufgabe 1

Sei $\widetilde{\mathbb{C}}$ die Menge der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

und bezeichne mit $+$ und $\cdot$ die Addition und Multipliktion von 2×2 Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\widetilde{\mathbb{C}}$ is abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$.

(b) Das Tupel $(\widetilde{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ is ein Körper.

(c) Der so definierte Körper ist isomorph zu $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2

Prüfen Sie die folgenden Eigenschaften von komplexer Konjugation und Betrag für $z, w \in \mathbb{C}$!

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(b) $\overline{\overline{z}} = z$ und $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(e) $|z| = 0$ genau dann wenn $z = 0$.

Zusatz: Warum definiert die Länge $d\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(z, w) = |z - w|$ eine Metrik?

Aufgabe 3

(a) An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen holomorph? An welchen Stellen sind sie differenzierbar?

  (i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = |z|^2$.

  (ii) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = \mathrm{Re}(z)$.

  (iii) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $h(z) = \overline{z}$.

(b) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es eine holomorphe Funktion $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(\mathrm{Re}\, k)(x + iy) = x^2 + axy + by^2 \ ?$$

Geben Sie im Falle der Existenz alle möglichen Funktionen h an!

Aufgabe 4

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$ gilt, so ist f lokal konstant. Insbesondere ist f dann auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant.

(b) Falls $\mathrm{Re}(f)$ oder $\mathrm{Im}(f)$ lokal konstant ist, so ist auch schon f lokal konstant.