Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
22. Oktober 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der *trigonometrischen Potenzreihen*

$$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei der verallgemeinerte Binomialkoeffizient definiert durch

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \text{und} \qquad \binom{\alpha}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha - j + 1}{j} \ .$$

Die *Binomialreihe* ist gegeben als

$$b_\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \ .$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R von $b_\alpha(z)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $z \in B_R(0)$ die Formel $b_{\alpha+\beta}(z) = b_\alpha(z) \cdot b_\beta(z)$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$P_k(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} z^n$$

und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, für die es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $f'(z) = c \cdot f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt. Zeigen Sie, dass f von der Form $f(z) = ae^{cz}$ ist und dass $a = f(0)$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir schreiben $f = u + iv$ und $z = x + iy$. Es folgt aus der Holomorphie, dass u und v zweimal stetig partiell differenzierbar sind (soweit sind wir in der Vorlesung noch nicht, für diese Aufgabe dürfen Sie das aber als bekannt annehmen).

Zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen sind, d.h. sie erfüllen die Laplace'schen Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Seien U, V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Eine bijektive holomorphe Abbildung $f \colon U \to V$ heißt *biholomorph*, wenn die Umkehrabbildung $f^{-1} \colon V \to U$ wieder holomorph ist.

Sei $\mathbb{H}$ die *obere Halbebene*, gegeben durch

$$\mathbb{H} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Im}(z) > 0 \right\}$$

und $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe, gegeben durch

$$\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1 \right\} \ .$$

Zeigen Sie, dass die *Cayley-Transformation*, die durch

$$h(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

gegeben ist, eine biholomorphe Abbildung $h \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definiert.

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 30. Oktober 2019** um **12:00**.