Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
4. November 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 2

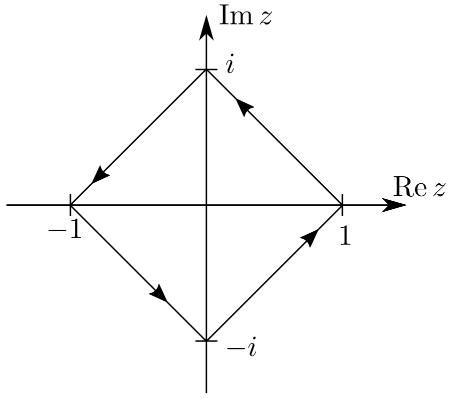
Aufgabe 1 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(a)

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1} \mathrm{d}z$$

(b) Sei γ der geschlossene Weg aus nachstehender Abbildung.



Geben Sie eine Parameterdarstellung von γ an und berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z.$$

(c) Gegeben seien die Wege

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t + it \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \beta : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t + it^2. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie α und β in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie

$$\int_\alpha z \exp(z^2) \mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \int_\beta z \exp(z^2) \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz über implizite Funktionen: Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung[1].

(a) Sei $a \in U$ so dass $f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $z_0 \in U_0 \subseteq U$, so dass $f|_{U_0}$ injektiv ist.

(b) Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ injektiv und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist $f(U)$ offen in $\mathbb{C}$, die Umkehrfunktion
$$f^{-1}\colon f(U) \to U$$
ist holomorph und es gilt
$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$
für alle $z \in f(U)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet (d.h. eine zusammenhängende offene Teilmenge). Eine stetige Funktion $l\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *stetiger Zweig des Logarithmus*, falls für alle $z \in U$ bereits $\exp(l(z)) = z$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Für jeden weiteren stetigen Zweig $\tilde{l}\colon U \to \mathbb{C}$ des Logarithmus gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\tilde{l}(z) = l(z) + 2\pi i k$ für alle $z \in U$.

(b) Jeder stetige Zweig des Logarithmus is holomorph und es gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in U$.

(c) Auf U existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus wenn die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion hat.

(d) Finden Sie zwei Gebiete $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^*$ sowie zwei stetige Zweige des Logarithmus $l_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ und $l_2\colon U_2 \to \mathbb{C}$, so dass ihre Differenz auf $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ nicht konstant ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$
eine invertierbare Matrix und
$$U = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls c} = 0 \\ \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$
Die *Möbius-Transformation* beschrieben durch A ist die Abbildung $\phi_A : U \to \mathbb{C}$ mit
$$\phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ .$$

[1] Wir werden in der Vorlesung sehen, dass das immer automatisch erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_I(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, falls

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eine Einheitsmatrix ist, und dass für $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt, dass $\phi_{AB}(z) = \phi_A(\phi_B(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ für die die auftretenden Abbildungen definiert sind.

(b) Die Möbius-Transformation $\phi_A : U \to \phi_A(U)$ ist biholomorph.

(c) Nun sei $A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ eine reelle 2×2-matrix mit positiver reeller Determinante. Zeigen Sie in diesem Fall, dass ϕ_A wohldefinierte biholomorphe Abbildung $\phi_A \colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ definiert, wobei $\mathbb{H}$ die obere komplexe Halbebene bezeichnet (vgl. Blatt 1, Aufgabe 6).

Anmerkung: Damit definiert die Vorschrift $A \mapsto \phi_A$ eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ durch biholomorphe Abbildungen. Mit Methoden, die den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, kann man zeigen, dass alle biholomorphen Abbildungen $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ von dieser Form sind.

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 13.11.2019** um **12:00**.