Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
20. November 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale!

(a)
$$\int_{\partial B_1(2)} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)} \mathrm{d}z$$

(b)
$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos \pi z}{z^2-1} \mathrm{d}z$$

(c)
$$\int_{\partial B_5(1+2i)} \frac{4z}{z^2+9} \mathrm{d}z$$

(d)
$$\int_{\partial B_1(0)} \exp\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Schreiben Sie als Potentzreihe im jeweiligen Entwicklungspunkt z_0! Geben Sie auch den Konvergenzradius der Reihen an.

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$, mit $z_0 = 1$.

(b) $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$, mit $z_0 = 0$.

(c) $h(z) = \frac{1}{(z+2)^3}$, mit $z_0 = -1$.

(d) $j(z) = \exp(z^2 - 2z - 1)$, mit $z_0 = 1$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und P ein Polynom. Angenommen, es gilt $|f(z) - P(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann schon $f(z) = P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt eine ganze Funktion f mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^3+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt eine ganze Funktion g mit $g(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gibt eine nicht konstante holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $h\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei $\mathbb{E} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1 \right\}$ und $a \in \mathbb{E}$. Sei

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{\overline{a}z - 1} \ .$$

Zeigen Sie, dass ϕ_a eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ definiert, so dass gilt:

(a) $\phi_a(a) = 0$,

(b) $\phi_a(0) = a$, und

(c) $\phi_a \circ \phi_a = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 27.11.2019** um **12:00**.