Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
5. Dezember 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung auf einer offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine nicht-wesentliche isolierte Singularität von f. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{ord}(f,a) = 0$ genau dann wenn f an der Stelle a eine hebbare Singularität besitzt und $\lim_{z\to a} f(z) \neq 0$.

(b) $\operatorname{ord}(f,a) > 0$ genau dann wenn f an der Stelle a eine hebbare Singularität besitzt und $\lim_{z\to a} f(z) = 0$.

(c) $\operatorname{ord}(f,a) < 0$ genau dann wenn f an der Stelle a einen Pol besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine nicht-wesentliche isolierte Singularität von f und g. Zeigen Sie, dass in diesem Fall auch $f \pm g$, $f \cdot g$, und $\frac{f}{g}$ (letzteres nur auf dem Komplement der Nullstellen von g in U definiert) an der Stelle a eine nicht-wesentliche Singularität besitzen und, dass gilt:

(a) $\operatorname{ord}(f \pm g, a) \geq \min\{\operatorname{ord}(f,a), \operatorname{ord}(g,a)\}$

(b) $\operatorname{ord}(f \cdot g, a) = \operatorname{ord}(f,a) + \operatorname{ord}(g,a)$

(c) $\operatorname{ord}(\frac{f}{g}, a) = \operatorname{ord}(f,a) - \operatorname{ord}(g,a)$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die eindeutige Laurentreihenentwicklung im jeweils angegebenen Entwicklungspunkt z_0 mit Konvergenzring R.

(a) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, mit $z_0 = i$ und $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-i| < 2\}$.

(b) f und z_0 wie eben aber diesmal mit $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z-i|\}$.

(c) $g(z) = \frac{\sin(z)-z}{z^2}$, mit $z_0 = 0$ und $R = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) $h(z) = \frac{z^3-1}{e^z}$, mit $z_0 = 0$ und $R = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Betrachte die Laurentreihe $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} z^k$. Bestimmen Sie den Konvergenzring von g und – falls dieser nicht leer ist – die Funktion, die durch g dargestellt wird.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gegeben und sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin nehmen wir an, dass $\operatorname{ord}(f, z_i)$ endlich ist für alle i und $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass f dann eine rationale Funktion ist, d.h. als Quotient von Polynomen p und q geschrieben werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie die Hauptteile der Laurentreihenentwicklungen in den z_i.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z) \mathrm{d}z,$$

wobei $R > 0$ so groß gewählt ist, dass alle z_i im Kreis $B_R(0)$ liegen.

(a) Definiere die Funktion $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Beweisen Sie:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(\tilde{f}, 0).$$

(b) Zeigen Sie: falls f eine rationale Funktion ist, dann gilt die *Geschlossenheitsrelation*

$$\sum_{p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \operatorname{Res}(f, p) = 0.$$

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 11.12.** um **12:00**.