Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
13. Dezember 2019

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Skizzieren Sie einen geschlossenen Weg in $\mathbb{C}$, sodass

$$\int_\gamma \frac{-z^2+z-1}{z^3+z^2} \mathrm{d}z = 10\pi i$$

gilt. Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Lösung ist Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, die in $a \notin U$ eine isolierte nicht-wesentliche Singularität besitzen. Beweisen Sie die folgenden nützlichen Rechenregeln für Residuen.

(a) Ist $\operatorname{ord}(f,a) \geq -1$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Ist allgemeiner a ein Pol der Ordnung k (d.h. $\operatorname{ord}(f,a) = -k$), so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{\tilde{f}^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \text{ min } \tilde{f}(z) = (z-a)^k f(z).$$

(b) Ist $\operatorname{ord}(f,a) \geq 0$ und $\operatorname{ord}(g,a) = 1$, so gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(c) Ist $f \not\equiv 0$, so ist für alle $z \in U$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right) = \operatorname{ord}(f,z).$$

(d) Ist g holomorph nach a fortsetzbar, so gilt

$$\operatorname{Res}\left(g\frac{f'}{f}, a\right) = g(a)\operatorname{ord}(f,a).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit dem Satz von Rouché!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung

$$z^5 + iz^3 - 4z + i = 0$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale.

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \mathrm{d}x.$$
(Sie dürfen annehmen, dass das uneigentliche Integral existiert.)

(b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-4\sin(z))^2} \mathrm{d}z$$

Die folgende Aufgabe ist eine **Bonusaufgabe**:

Aufgabe 6 (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

beweisen. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(a) Wir definieren die Hilfsfunktion

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)}, \text{ wobei } a = e^{\pi i/4}\sqrt{\pi}.$$

Zeigen Sie, dass $z = a/2$ der einzige Pol von f mit Imaginärteil zwischen 0 und $\operatorname{Im} a$ ist. Bestimmen Sie außerdem Polordnung und Residuum in diesem Punkt.

(b) Sei $R > 0$. Zeichnen Sie das Parallelogramm $P \subseteq \mathbb{C}$ mit Eckpunkten R, $R+a$, $-R+a$ und $-R$. Bestimmen Sie anschließend den Wert des Integrals $\int_{\partial P} f(z)\mathrm{d}z$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R,R+a]} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,-R+a]} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Hier bezeichnet $[R, R+a]$ die gerade Verbindungsstrecke von R nach $R+a$.

(d) Beweisen Sie die Formel

$$f(z) - f(z + a) = \exp(-z^2)$$

und folgern Sie nun die Hauptaussage der Aufgabe. Beachten Sie, dass Sie dazu insbesondere zunächst zeigen müssen, dass das uneigentliche Integral aus der Hauptaussage existiert.

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 15.01.** um **12:00**.