Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
22. Januar 2020

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie Lösungen mit maximalem Definitionsbereich für die folgenden Differentialgleichungen mit der jeweils gegeben Anfangsbedingung:

(a) $x' = x\exp(3t)$ mit $x(0) = 1$

(b) $x' = \sin t(x + \cos t)$ mit $x(\pi/2) = 0$

(c) $x' = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x(\pi/6) = 1/2$

(d) $x' = (x - 4t)^2$ mit $x(0) = c \in (-2, 2)$. Hinweis: in dieser Differentialgleichung können die Veränderlichen durch eine geeignete Substitution getrennt werden.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $\alpha \neq 1$ und g und h stetige Funktionen. Eine *Bernoulli-DGL* sieht in ihrer allgemeinen Form wie folgt aus:

$$0 = x' + g(t)x + h(t)x^\alpha.$$

(a) Substituieren Sie $u = x^{1-\alpha}$ um eine lineare Differentialgleichung zu erhalten.

(b) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus Teil (a) um eine Lösung für die Differentialgleichung

$$x' + 2tx = x^2 e^{t^2}$$

mit $x(0) = 2$ zu bestimmen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{y}{x} \in J \right\}$$

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ für } (x, y) \in G$$

heißt *homogene Differentialgleichung*. Wir wollen nun sehen, wie sich eine solche Gleichung lösen lässt.

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}^*$ ein Intervall und $(x_0, y_0) \in G$ mit $x_0 \in I$ eine Anfangsbedingung. Beweisen Sie:

$$\phi : I \to \mathbb{R} \text{ ist Lösung der Gleichung } y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ mit } \phi(x_0) = y_0$$

genau dann wenn

$$\begin{bmatrix} \psi : I \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \dfrac{\phi(x)}{x} \end{bmatrix} \text{ löst das Anfangswertproblem } \begin{bmatrix} z' = \dfrac{1}{x}(f(z) - z) \text{ für } (x, z) \in \mathbb{R}^* \times J \\ \psi(x_0) = \dfrac{y_0}{x_0} \end{bmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $y' = \frac{x-y}{x+y}$ durch den Punkt (x_0, y_0).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen

$$y' = Ay,$$

wobei $y \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei außerdem eine Anfangsbedingung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Angenommen A ist diagonalisierbar. Geben Sie eine Lösung für das DGL-System in Abhängigkeit der Anfangsbedingung an.

(b) Beschreiben Sie ein Methode, um das DGL-System zu lösen, auch wenn A nicht diagonalisierbar ist. Sie können dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A ähnlich zu einem Jordanblock ist.

Abgabe bis zum **Mittwoch, den 29.01.** um **12:00**.