GRUNDWISSEN MENGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE: EIN SELBSTARBEITSBLATT

Ziel dieses Selbstarbeitsblattes ist es die Grundlagen der mengentheoretischen Topologie zu wiederholen, die für die Vorlesung "Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen" benötigt werden. Viel mehr Details sowie die Lösungen der Aufgaben finden Sie zum Beispiel in [Wer09, Abschnitt 1] und [vQ79]. Kommentare und Korrekturen sind herzlich willkommen.

Topologische Räume

Definition 1. Sei X eine Menge. Eine *Topologie auf* X ist eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, den sogenannten *offenen* Teilmengen, die die folgenden Axiome erfüllt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$;
(ii) für eine beliebige Familie von $U_i \in \mathcal{T}$ (mit $i \in I$) ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$; und
(iii) für $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ ist ebenso $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Wir nennen das Paar $(X, \mathcal{T})$ einen *topologischen Raum* und scheiben häufig einfach X für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.

Aufgabe 1. Verifizieren Sie die Axiome einer Topologie in den folgenden Beispielen:

(i) Sei X eine beliebige Menge. Dann besteht die *triviale Topologie* nur aus $\emptyset$ und X.
(ii) Wir definieren auf $\mathbb{R}$ die euklidische Topologie, wie folgt: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls es für jeden Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass das offene Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ in U enthalten ist.
(iii) Sei X eine Menge mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Eine Menge $U \subseteq X$ ist offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ alle Punkte $y \in X$ mit $y \leq x$ ebenso in U enthalten sind.

Definition 2. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $U = X - A$ offen ist.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X. Wir definieren $\mathcal{T}^c$ als die Menge der Komplemente

$$\mathcal{T}^c = \{A \subseteq X \big| X - A \in \mathcal{T}\}$$

von $\mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert, genau dann wenn die folgenden Axiome für $\mathcal{T}^c$ gelten:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}^c$ und $X \in \mathcal{T}^c$;
(ii) für eine beliebige Familie von $U_i \in \mathcal{T}^c$ (mit $i \in I$) ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}^c$; und
(iii) für $U_1, U_2 \in \mathcal{T}^c$ ist ebenso $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{T}^c$.

Definition 3. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt eine Teilmenge $D \subseteq X$ eine *Umgebung* von x, falls es eine offene Teilmenge U gibt, für die $x \in U \subseteq D$ gilt.

Definition 4. Wir sagen ein topologischer Raum X erfüllt das *Hausdorffsche Trennungsaxiom*, falls es für zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ bereits offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$ gilt. In diesem Fall nennen wir X einen *Hausdorff-Raum*.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie bereits das Hausdorff-Axiom erfüllt.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen, dass eine Teilmenge $V \subseteq Y$ *relativ offen in* Y ist, falls es eine offene Teilmenge U in X gibt, so dass $V = U \cap Y$. Zeigen Sie, dass die Menge der relativ offenen Teilmengen von Y eine Topologie definiert, die das Hausdorff-Axiom erfüllt, wenn X das Hausdorff-Axiom erfüllt. Diese Topologie heißt *Teilraumtopologie* oder auch *induzierte Topologie*.

Basen

Definition 5. Sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{B}$ ganz X ergibt und dass für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{B}$ der Schnitt $A \cap B$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann. Ein solche Menge $\mathcal{B}$ heißt *Basis*.

Aufgabe 5. Gegeben sei eine Menge X mit einer Basis $\mathcal{B}$. Zeigen Sie dass

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X | U \text{ ist Vereinigung von Elementen aus } \mathcal{B}\}$$

eine Topologie auf X definiert. Umgekehrt ist für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ die Topologie $\mathcal{T}$ eine Basis.

Aufgabe 6. Finden Sei eine möglichst einfache Basis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$.

Stetige Abbildungen

Definition 6. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Die Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in einem Punkt* $x \in X$, falls es für jede offene Umgebung V von $y = f(x)$ (in $\mathcal{T}_Y$) bereits eine offene Umgebung U von x (in $\mathcal{T}_X$) gibt, so dass $f(U) \subseteq V$. Die Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Aufgabe 7. Vergewissern Sie sich, dass dieser Stetigkeitsbegriff mit dem aus der Analysis I bekannten ϵ-δ-Stetigkeitsbegriff für Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$ übereinstimmt.

Aufgabe 8. Seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, falls für jede offene Menge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Aufgabe 9. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von einer Menge X in einen topologischen Raum Y. Beweisen Sie, dass die Menge der Urbilder $f^{-1}(V)$ von offenen Mengen $V \subseteq Y$ eine Topologie auf X bildet. Bezüglich dieser Topologie ist f stetig. Man nennt sie die *von* f *induzierte Topologie*. Beweisen Sie auch, dass die Teilraumtopologie von $Y \subseteq X$ von der Inklusionsabbildung $i : Y \to X$ induziert wird.

Aufgabe 10. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *lokal konstant*, falls es um jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung gibt, für die die Einschränkung $f|_U\colon U \to Y$ konstant ist. Zeigen Sie, dass jede lokal konstante Abbildung bereits stetig ist.

Definition 7. Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Bijektion $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ ebenso stetig ist. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homöomorph*, falls es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass zwei nicht-leere offene/halboffene/geschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ jeweils homöomorph sind.

Zusammenhang

Definition 8. Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, dass X *zusammenhängend* ist, falls das Folgende gilt: Ist $X = U \cup V$ für zwei offene Teilmengen mit $U \cap V = \emptyset$, so gilt bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Falls X nicht zusammenhängend ist, so nennen wir es auch *unzusammenhängend*.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass die zusammenhängenden Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gerade die Intervalle (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, und $[a, b]$ (mit $\infty \leq a \leq b \leq \infty$) sind.

Aufgabe 13. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist genau dann wenn jede lokal konstante Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ bereits konstant ist.

Definition 9. Sei X ein topologischer Raum. Ein *stetiger Weg* ist eine stetige Abbildung $\gamma \colon I \to X$ von dem Einheitsintervall $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ nach X. Ein topologischer Raum heißt *wegzusammenhängend*, falls es zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ bereits einen stetigen Weg γ gibt, d.h. falls es für jedes Paar $x, y \in X$ einen stetigen Weg γ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass ein wegzusammenhängender Raum bereits zusammenhängend ist.

Aufgabe 15. Ein topologischer Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, falls es um jeden Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung gibt. Zeigen Sie, dass eine lokal wegzusammenhängender topologischer Raum X wegzusammenhängend ist genau dann wenn er bereits zusammehängend ist.

Aufgabe 16. Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass, falls X zusammenhängend/wegzusammenhängend ist, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend/wegzusammenhängend.

Kompaktheit

Definition 10. Ein topologischer Raum heißt *quasi-kompakt*, falls es für jede beliebige Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Teilmengen eine endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ gibt, so dass $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Ein quasi-kompakter topologischer Raum heißt *kompakt*, falls er zusätzlich das Hausdorff-Axiom erfüllt.

Beachten Sie, dass häufig in der Literatur auch eine andere Konvention verwendet wird. In diesen Fällen heißen quasi-kompakte Räume schon *kompakt* und kompakte Räume werden als *kompakte Hausdorff-Räume* bezeichnet.

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie bereits kompakt sind.

Aufgabe 18. Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass, falls X quasi-kompakt ist, so ist auch $f(X)$ quasi-kompakt.

Aufgabe 19. Sei X ein quasi-kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge quasi-kompakt ist.

Aufgabe 20. Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 21. Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Bijektion. Falls X quasi-kompakt ist und Y das Hausdorff-Axiom erfüllt, dann ist f bereits ein Homöomorphismus.

Konvergente Folgen

Definition 11. Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X. Wir sagen, dass die Folge (x_n) gegen einen Punkt $x \in X$ *konvergiert*, falls es für jede offene Umgebung U von x ein $N \geq 0$ gibt, so dass $x_n \in U$ gilt für alle $n \geq N$. Wir nennen x einen *Grenzwert* der Folge.

Aufgabe 22. Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge, die gegen den Punkt $x \in X$ und gegen den Punkt $y \in X$ konvergiert. Zeigen Sie, dass, falls X das Hausdorff-Axiom erfüllt, dann gilt bereits $x = y$. In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte von konvergenten Folgen also eindeutig bestimmt.

Aufgabe 23. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, die stetig im Punkt $x \in X$ ist. Zeigen Sie, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, schon gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieser Aussage gilt, falls sowohl X als auch Y metrische Räume sind.

Aufgabe 24. Sei X ein quasi-kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Metrische Räume

Definition 12. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X\times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$;
(ii) $d(x,y) = 0$ genau dann wenn $x = y$ (Positive Definitheit);
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie); und
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d heißt *metrischer Raum*. Wieder schreiben wir einfach X anstelle von (X, d), wenn die Metrik aus dem Kontext klar ist.

Aufgabe 25. Wir sagen, dass eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d) *offen* ist, falls es für jeden Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der offene Ball

$$B_\epsilon(x) = \left\{ y \in X \middle| d(x,y) < \epsilon \right\}$$

eine Teilmenge von U ist. Zeigen Sie, dass dies eine Topologie definiert, die die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass die Menge aller Mengen der Form $B_\epsilon(x)$ eine Basis für diese Topologie ist.

Aufgabe 26. Verifizieren Sie die Axiome einer Metrik in den folgenden Beispielen:

(i) Sei X eine Menge. Dann ist die *triviale Metrik* definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

(ii) Auf der Menge reellen Zahlen definieren wir die *euklidische Metrik* durch

$$d(x,y) = |x - y| .$$

(iii) Sei $X = \mathbb{F}_2^n$ der Vektorraum der n-Tupel über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit zwei Elementen. Dann definieren wir die *Hamming-Metrik* durch

$$d(x,y) = \#\left\{ i = 1, \ldots, n \middle| x_i \neq y_i \right\} .$$

Normen

Definition 13. Sei V eine reeller Vektorraum. Eine Abbildung $||.||\colon V \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf V, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $||x|| \geq 0$ für alle $x \in V$;
(ii) $||x|| = 0$ genau dann wenn $x = 0$;
(iii) $|\lambda x| = |\lambda|||x||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in V$; und
(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in V$.

Ein Paar bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einer Norm $||.||$ heißt *normierter Vektorraum*.

Aufgabe 27. Sei $(V, ||.||)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Zuordnungsvorschrift

$$d(x, y) = ||x - y||$$

eine Metrik auf V definiert.

Aufgabe 28. Verifizieren Sie die Axiome einer Norm in den folgenden Beispielen.

(i) Auf $\mathbb{R}$ definiert der Absolutbetrag $|.|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Norm.
(ii) Die *Euklidische Norm* $||.||_2$ ist definiert durch

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \, .$$

(iii) Die *Supremumsnorm* $||.||_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$||x||_\infty = \max\left\{|x_i| \middle| i = 1, \ldots, n\right\} \, .$$

(iv) Die 1-*Norm* $||.||_1$ auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$||x||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \, .$$

Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stimmt die euklidische Norm $||.||_2$ mit dem komplexen Absolutbetrag $|.|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $z = x + iy \mapsto \sqrt{z \cdot \bar{z}} = x^2 + y^2$ überein.

Aufgabe 29. Zwei Normen $||.||$ und $||.||'$ auf einem reellen Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls es $C, D > 0$ gibt, so dass

$$D \cdot ||x||' \leq ||x|| \leq C \cdot ||x||'$$

für alle $x \in V$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Zwei äquivalente Normen induzieren dieselbe Topologie auf V.
(ii) Falls $V = \mathbb{R}^n$, dann sind die Normen $||.||_1$, $||.||_2$, und $||.||_\infty$ äquivalent.

Man kann in der Tat zeigen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.

References

[vQ79] Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, Hochschultext.

[Wer09] Dirk Werner, *Einführung in die höhere Analysis*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2009, Topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis.