Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
4. Februar 2020

Funktionentheorie und gew. DGLen
Prof. Dr. Martin Ulirsch
Felix Röhrle

Klausurübungsblatt 1

Aufgabe 1

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Aussagen kurz.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität in $a \notin U$. Wenn für alle $\epsilon > 0$ mit $\overline{B_\epsilon(a)} \subseteq U \cup \{a\}$ gilt, dass

$$\int_{\partial B_\epsilon(a)} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

dann ist f holomorph nach a fortsetzbar.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \notin U$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit einer isolierten Singularität in a. Angenommen die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$. Wenn für alle n die Singularität von f_n in a nicht wesentlich ist, dann hat auch f in a eine nicht-wesentliche Singularität.

(c) Zwei holomorphe Funktionen $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet D mit $[0, 1] \subseteq D$, für die gilt, dass $f(0) = g(0)$ und $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sind bereits gleich.

(d) Sei $f \colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im zweiten Argument lokal Liptschitz-stetig ist und sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Weiter seien $\phi, \psi \colon U \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Wenn es ein $x_0 \in U$ gibt mit $\phi(x_0) = \psi(x_0)$, dann gilt bereits $\phi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in U$.

(e) Für $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig betrachte die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = a(x)y' + b(x)y.$$

Diese besitzt ein Lösungsfundamentalsystem (ϕ, ψ) mit $\phi'(x_0) = \psi'(x_0) = 0$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass das folgende reelle uneigentliche Integral existiert und bestimmen Sie seinen Wert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 - 9z + 20}{z^4 + 9z^2 + 20}\mathrm{d}z$$

(b) Seien $a > b > 0$ reelle Konstanten. Bestimmen Sie den Wert des folgenden reellen Integrals in Abhängigkeit von a und b.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe einen positiven Konvergenzradius. Im Konvergenzkreis gelte $P(z) = P(-z)$. Dann ist $a_n = 0$ für alle ungeraden n.

Aufgabe 4

Sei $P(z) = z^4 - 5z + 1$. Zeigen Sie, dass

(a) P genau eine komplexe Nullstelle a mit $|a| < \frac{1}{4}$ besitzt und

(b) alle anderen komplexen Nullstellen $\frac{3}{2} < |z| < \frac{15}{8}$ erfüllen.

Aufgabe 5

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\overline{B_r(a)} \subseteq U$. Beweisen Sie: Wenn für alle $z \in \partial B_r(a)$ gilt, dass $|f(z)| > |f(a)|$, dann hat f eine Nullstelle im Inneren von $B_r(a)$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \colon I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Sei $\phi \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \tag{1}$$

Sei $J \subset I$ ein Intervall mit $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Zeigen Sie, dass Sie auf J eine zweite, von ϕ linear unabhängige Lösung $\psi \colon J \to \mathbb{R}$ von (1) durch den Ansatz

$$\psi(x) = \phi(x)u(x)$$

erhalten, wobei u eine nicht-konstante Lösung der Differentialgleichung

$$u'' + \left(2\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} + a(x)\right) u' = 0$$

ist.