

Proseminar: Beweismethoden

Prof. Annette Werner und Dr. Ben Heuer

Dieses Proseminar widmet sich grundlegenden Methoden des mathematischen Beweisens: Wir studieren die logische Struktur mathematischer Beweise, und lernen verschiedene elementare Beweistechniken kennen, die überall in der Mathematik zu finden sind.

Dabei folgen wir dem Buch “How to prove it: A structured approach” von Daniel J. Velleman [1]. Hinweis: Das Buch ist in englischer Sprache verfasst, die Vorträge werden aber auf Deutsch sein. Falls Sie sich unsicher fühlen bzgl der Sprache: “Mathematisches Englisch” ist eine echte Teilmenge von “Englisch” die man recht schnell erlernt.

Ein grundsätzlicher Hinweis zur Vortragsgestaltung: Wenn für Ihren Vortrag bestimmte Abschnitte des Buches zugeteilt sind, bedeutet das keinesfalls, dass Sie den gesamten Inhalt inklusive aller Beispiele wiedergeben sollen. Stattdessen besteht Ihre Aufgabe darin, die wichtigsten Punkte herauszustellen, hilfreiche Beispiele auszuwählen, und dies alles in einem kohärenten Vortrag zusammenzustellen, der ziemlich genau 90 Minuten dauert (auf keinen Fall länger, aber auch nicht deutlich kürzer). Abgesehen von den konkreten Angaben zum Inhalt in der Vortragsbeschreibung gehört es also zu Ihrer Aufgabe, zu identifizieren, was sinnvollerweise in Ihren Vortrag gehört und was ausgelassen werden kann.

Vortrag 1 (24.10)

Geben Sie eine Einführung in die Grundlagen der Aussagenlogik indem Sie die Abschnitte §1.1-1.2 zusammenfassen: Diskutieren Sie insbesondere Aussagevariablen und die logischen Operationen $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Führen Sie Wahrheitstabellen ein und besprechen Sie insbesondere die Wahrheitstabellen von $\vee$, $\wedge$, $\neg$, sowie weitere geeignete Beispiele aus §1.2. Besprechen Sie alle logischen Gesetze die auf den Seite 21 und 23 aufgeführt sind.

Vortrag 2 (31.10)

Abschnitte §1.3-§1.4: Fassen Sie §1.3 zusammen, wobei Sie sich auf die eher mathematischen Beispiele konzentrieren können (anstatt auf die eher “sprachlichen”). Führen Sie Wahrheitsmengen ein (Definition 1.3.4) und beschreiben Sie, wie sich die logischen Verknüpfungen aus Vortrag 1 in Operationen von Wahrheitsmengen übersetzen (§1.4). Besprechen sie Venn-Diagramme, den Beweis von Theorem 1.4.7 und Exercise 9 in §1.4.

Vortrag 3 (7.11)

Abschnitte §1.5 und §3.4: Führen Sie Konditionale (“ $\leftarrow$ ”) und Bikonditionale (“ $\leftrightarrow$ ”) ein und besprechen sie die Konditionalregeln (“Conditional laws”) sowie die Kontraposition. Erläutern Sie dann die Beweismethoden in §3.4 (Hinweis: Sie können hierbei Example 3.4.1 und 3.4.3 überspringen, konzentrieren Sie sich eher auf die anderen Beispiele).

Vortrag 4 (14.11)

Abschnitte §3.2 und §3.5: Erläutern Sie die Beweismethoden für Negationen und Konditionale. Erklären Sie insbesondere die Konzepte des “Beweises durch Widerspruch”, “Modus Ponens” und “Modus Tollens”. Diskutieren Sie geeignete Beispiele.

Erklären Sie dann “Beweise durch Fallunterscheidung” anhand vom Beginn von §3.5 sowie den Beispielen 3.5.1 und 3.5.3.

Vortrag 5 (21.11)

Abschnitte §2.1-2.2 und §3.3: Führen sie Quantifikatoren ein (§2.1). Erklären Sie die Negierungsregeln für Quantifikatoren (§2.2 und Example 3.4.3). Demonstrieren Sie anhand von Beispielen, wie man Aussagen über Quantifikatoren beweist, insbesondere die Konzepte der “existenziellen Instanziierung” und der “universellen Instianziierung”.

Vortrag 6 (28.11)

Abschnitt §3.6: Diskutieren Sie Beweismethoden für “Existenz und Eindeutigkeit”. Illustrieren Sie diese anhand von geeigneten Beispielen aus dem Unterabschnitt “Exercises”, die Sie selbst auswählen.

Vortrag 7 (05.12)

Abschnitt §6.1: Diskutieren Sie die Beweismethode der vollständigen Induktion. Diskutieren Sie einige geeignete einführende Beispiele Ihrer Wahl aus Abschnitt §6.1, sowie Exercise 18 aus §6.3 (Binomialkoeffizienten und das Pascalsche Dreieck).

Vortrag 8 (12.12)

Abschnitt §6.2: Geben Sie weitere Anwendungsbeispiele der Induktion, dieses mal aus der Geometrie: Besprechen Sie die Theoreme und Beweise aus Example 6.2.3, Example 6.2.4 sowie Exercises 12 und (sofern der zeitliche Rahmen dies zulässt) Exercise 14.

Vortrag 9 (19.12)

Abschnitt §6.4: Führen Sie die Beweismethode der “starken Induktion” ein. Demonstrieren Sie diese anhand von Theorem 6.4.2 (Primzerlegung) und Theorem 6.4.3 (explizite Fibonacci-Formel).

Vortrag 10 (09.01)

Abschnitte §4.2 und §5.1: Wiederholen Sie den Begriff der Relation (§4.2), und besprechen Sie Definition 4.2.3 und Theorem 4.2.5. Stellen Sie dann die Definition von Funktionen aus §5.1 vor und besprechen Sie Example 5.1.2.7, Theorem 5.1.4, Theorem 5.1.5 und Exercise 9.

Sprachliche Hinweise: “domain”=Definitionsbereich, “range”=Wertebereich. Abweichend vom Buch bezeichnen wir den Wertebereich einer Funktion f als ihr “Bild” und schreiben $\text{im}(f)$ (von “image”) statt $\text{Ran}(f)$ (von “range”), da diese Konvention üblicher ist.

Vortrag 11 (16.01)

Abschnitt §5.2: Erklären Sie anhand von Definition 5.2.1, wie Injektivität und Surjektivität für Funktionen definiert sind, wie sie im vorhergegangenen Vortrag eingeführt wurden. Beweisen Sie Theorem 5.2.3 und diskutieren Sie geeignete Beispiele. Beweisen Sie dann Theorem 5.2.5 und Exercise 8, sowie, falls der zeitliche Rahmen es zulässt, Exercise 18(a).

Sprachliche Hinweise: “one-to-one”=*injektiv*, “onto”=*surjektiv*.

Vortrag 12 (23.01)

Abschnitt §5.3: Zeigen Sie Theorem 5.3.1 und erläutern Sie, wie dieses den Begriff der inversen Funktion mithilfe der inversen Relation erfasst: Besprechen Sie hierfür die Beweise der Theoreme 5.3.2 und 5.3.3 und fassen Sie diese wie in Theorem 5.3.4 zusammen. Zeigen Sie dann die Eindeutigkeit der inversen Funktion, Theorem 5.3.5.

Vortrag 13 (30.01)

Geben Sie eine Einführung in die computergestützte Beweisverifikation mit Proof Assistants: Dieser Vortrag handelt davon, wie (menschengemachte) mathematische Beweise mithilfe von Computern “verifiziert” werden können: Hierfür ist es zentral, formale Beweisstrukturen zu identifizieren, wie wir sie in diesem Seminar kennengelernt haben. Erklären Sie die grundlegende Funktion von Formal Proof Verification Software und geben Sie praktische Beispiele anhand der Software Lean. Hilfreiche Links:

- https://leanprover-community.github.io/lean_projects.html,
- https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game

References

- [1] Daniel J. Velleman. *How to prove it—a structured approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019. Third edition.