

10. Übungsblatt (erschienen am 17.6.2024)

Aufgabe 10.1 (Votieraufgabe)

Wie lauten die Normalformen der folgenden linearen Programme? Welche von ihnen sind lösbar bzw. eindeutig lösbar? (Eine Veranschaulichung im \mathbb{R}^2 ist nützlich.)

- (a) $\min x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,
- (b) $\max x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,
- (c) $\max x_1 + x_2$ u.d.N. $x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 - 2x_2 \geq -1$, $2x_1 - x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Aufgabe 10.2 (Schriftliche Aufgabe)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Der zulässige Bereich

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

sei nicht leer.

- (a) Zeigen Sie, dass K genau dann beschränkt ist, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $y \neq 0$, $y \geq 0$ und $Ay = 0$.
- (b) Sei $b = 0$. Beweisen Sie, dass dann $x = 0$ die einzige Ecke von K ist.

Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)

Seien $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $1 \leq \text{rang}(A) =: m'$. Betrachte

$$Ax = b. \tag{1}$$

Bestimmen Sie eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ mit vollem Zeilenrang und $b' \in \mathbb{R}^{m'}$, so dass

$$A'x = b' \tag{2}$$

ein äquivalentes Gleichungssystem ist (d.h. die Lösungsmengen von (1) und (2) übereinstimmen).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die QR-Zerlegung für A verwenden (siehe Skript zu Einführung in die Numerik, Bemerkung 2.39):

$$Q^*AE = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := R$$

wobei E eine Permutationsmatrix, Q eine unitäre Matrix und R_1 eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 10.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Schreiben Sie eine Funktion

```
function [A',b'] = Reduktion(A,b),
```

welche Aufgabe 10.3 numerisch umsetzt. Testen Sie Ihre Funktion für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die QR-Zerlegung ist bereits mittels der Funktion $[Q, R, E] = \text{qr}(A)$ in Matlab implementiert.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 24.6.2024 um 10 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt.** Es gibt jeweils +0.5 Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.