

Bachelorarbeit

Translationsflächen als algebraische Kurven - ein besonderes Beispiel in Geschlecht 4

Lukas Schneider

29.März.2023

Betreuung: Prof. Dr. Frank Herrlich

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Karlsruhe, den 29.03.2023

Inhaltsverzeichnis

1	Translationsflächen und Origamis	5
1.1	Definition und erste Eigenschaften	5
1.2	Origamis als Permutationen	9
1.3	Riemannsche Flächen und Überlagerungen	10
1.4	Die Origami-Überlagerung	15
2	Das Origami S	17
2.1	Charakterisierungen von S	17
2.2	Zerlegung der Origami-Überlagerung	19
3	Veechgruppe	22
3.1	Abbildungen zwischen (endlichen) Translationsflächen	22
3.2	$SL_2(\mathbb{R})$ -Aktion	25
3.3	Veechgruppe von S	27
4	Das Origami S als algebraische Kurve	31
4.1	Der Automorphismus c	31
4.2	Die Gleichung(-en) für S	33
4.3	Darstellungen von c	35

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Translationsflächen und deren Darstellung als algebraische Kurven. Dabei wird der Fokus auf eine besondere Klasse von Translationsflächen, nämlich Origamis liegen. Origamis erhält man durch Verklebung von endlich vielen Einheitsquadraten. Sie haben also eine kombinatorisch einfach zu beschreibende Konstruktion. Jedes Origami besitzt in natürlicher Weise eine Struktur als (kompakte) Riemannsche Fläche. Die Verbindung zu algebraischen Kurven erhält man durch folgenden Satz (siehe [Har08, Ch. 5.1.7]).

Satz. *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist der Funktionenkörper $\mathbb{C}(X)$ eine endliche erzeugte Körpererweiterung von \mathbb{C} mit Transzendenzgrad 1.*

Umgekehrt findet man für jede Körpererweiterung von \mathbb{C} mit Transzendenzgrad 1 eine Riemannsche Fläche, die den Erweiterungskörper als Funktionenkörper hat.

Mithilfe dieses Satzes kann man zeigen, dass man jede kompakte Riemannsche Fläche als nichtsinguläre projektive Kurve und umgekehrt jede nichtsinguläre projektive Kurve als kompakte Riemannsche Fläche auffassen kann (siehe [Har11, Ch. 9.3]).

Allerdings ist für eine kompakte Riemannsche Fläche die zugehörige algebraische Kurve zu finden eine schwierige Aufgabe. In speziellen Fällen wie z.B. den komplexen Tori \mathbb{C}/Λ für Gitter Λ ist es gelungen die zugehörige algebraische Kurve zu bestimmen. \mathbb{C}/Λ ist eine elliptische Kurve (für die konkrete Weierstraßgleichung siehe [Sil09, Ch. 6, Prop. 3.6]). In [HS05] hat man für eine spezielle Familie von Riemannschen Flächen - dem Origami W - die algebraische Kurve bestimmt. Dabei wurden konkrete Eigenschaften von W als Origami ausgenutzt.

Im Vordergrund dieser Arbeit steht das Origami S (siehe Kapitel 2), welches von W inspiriert ist. Das Ziel ist es S zu untersuchen und die zu S gehörige algebraische Kurve zu bestimmen. Dabei gehen wir wie folgt vor.

In Kapitel 1 führen wir Origamis ein und werden uns verschiedene Möglichkeiten für deren Beschreibung anschauen. Des Weiteren versehen wir jedem Origami mit einer Struktur als Riemannsche Fläche.

In Kapitel 2 werden wir uns dem Origami S und seinen verschiedenen Darstellungen widmen. Außerdem werden wir die zugehörige Origami-Überlagerung in zwei Überlagerungen aufteilen, was sich später als sehr nützlich herausstellt.

Mittels einer Matrix aus $SL_2(\mathbb{R})$ kann man eine neue Struktur als Translationsfläche (und somit auch als Riemannsche Fläche) auf dem zugrundeliegenden topologischen Raum definieren. Nun stellt sich die Frage "Für welche Matrizen stimmt die neu definierte Struktur mit der ursprünglichen überein?". Diese Matrizen bilden die sogenannte Veechgruppe einer Translationsfläche. Weitere Eigenschaften der Veechgruppe und die Veechgruppe von S werden wir in Kapitel 3 kennenlernen.

Abschließend kommen wir in Kapitel 4 zum Highlight dieser Arbeit. Wir werden einen speziellen Automorphismus von S bestimmen und mithilfe der Zerlegung der Origami-Überlagerung aus Kapitel 2 die zu S gehörige algebraische Kurve bestimmen.

1 Translationsflächen und Origamis

In diesem Kapitel studieren wir Origamis und deren Struktur als Translationsflächen. Außerdem schauen wir uns verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von Origamis an.

1.1 Definition und erste Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir Translationsflächen und Origamis ein. Wir werden jeder Translationsfläche eine Struktur als Mannigfaltigkeit geben und eine Formel für das Geschlecht herleiten.

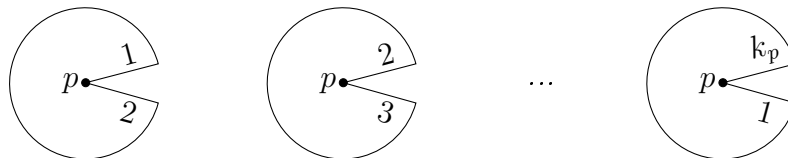
Definition 1.1.1 (Translationsfläche). *Eine Translationsfläche ist eine zusammenhängende 2-dimensionale (reelle) Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Translationsatlanten. Dabei ist ein Translationsatlas ein Atlas, bei dem alle Übergangsfunktionen Translationen (in \mathbb{R}^2) sind.*

Satz 1.1.2 (flache Metrik). *Sei X eine Translationsfläche. Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 induziert eine Metrik auf ganz X . Wir nennen sie flache Metrik.*

Beweis. Die Übergangsfunktionen sind Translationen, also Isometrien bezüglich der euklidischen Metrik. Folglich lässt sich die euklidische Metrik auf den Karten auf ganz X fortsetzen. \square

Definition 1.1.3 (konische Singularität). *Sei X eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas (U_i, φ_i) , $p \in X$ und (U_i, φ_i) ist auf $X \setminus \{p\}$ ein Translationsatlas. p heißt konische Singularität (für die Translationsstruktur), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die ε -Umgebung um p die Verklebung aus $k_p \geq 1$ geschlitzten Kreisscheiben (siehe unten) ist k_p heißt auch Umlaufzahl (von p).*

Die Verklebung der geschlitzten Kreisscheiben sieht folgendermaßen aus.



Die Lücke zwischen den Kanten ist nur zur Übersicht so groß eingezeichnet. Eigentlich deckt jede Scheibe einen Winkel von 2π ab. Für einen vorgegebenen Radius r und Winkel von 0 gibt es zwei Punkte auf der Kreisscheibe (einen auf der ersten Kante, der andere auf der zweiten).

Definition 1.1.4 (endliche Translationsfläche). *Eine zusammenhängende kompakte Fläche X mit Atlas (U_i, φ_i) heißt endliche Translationsfläche, wenn es eine endlichen Teilmenge $\Sigma \subset X$ gibt, sodass (U_i, φ_i) ein Translationsatlas auf $X \setminus \Sigma$ definiert und jedes $\sigma \in \Sigma$ lokal eine konische Singularität ist. Wir nennen einen Punkt $x \in X$ lokal eine konische Singularität ist, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt (U ist als offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit wieder eine Mannigfaltigkeit), sodass σ eine konische Singularität auf U ist.*

Definition 1.1.5 (Origami). Seien $Q_1, \dots, Q_d \in \mathbb{R}^2$ disjunkte achsenparallele Quadrate mit Kantenlänge 1. Verklebe durch Translation jede linke Seite eines Quadrats mit genau einer rechten Seite eines Quadrats und jede obere mit genau einer unteren. Ist der durch die Verklebung entstandene topologische Raum (mit der Quotiententopologie) zusammenhängend, so heißt er Origami. d heißt auch der Grad des Origamis.

Beispiel 1.1.6. Torus aus einem Einheitsquadrat und ein Origami vom Grad 3

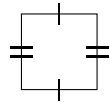


Abbildung 1: Standardtorus

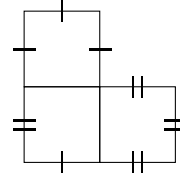


Abbildung 2: Ein Origami vom Grad 3

Satz 1.1.7. Jedes Origami ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit

Beweis. Gegeben sei ein Origami X , dass durch Verklebung der Quadrate Q_1, \dots, Q_d , $d \in \mathbb{N}$ entsteht. π bezeichne die Quotientenabbildung und K die Vereinigung aller Kanten der Q_i . Gebe für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung U_x an, die homöomorph zu einer offenen Umgebung des \mathbb{R}^2 ist. Dabei treten 3 Fälle auf:

Fall 1: $\pi^{-1}(p) = \{x\}$

Wähle eine offene Umgebung U um x klein genug, sodass $U \cap K = \emptyset$. Da im Inneren der Quadrate unter π nur Punkte mit sich selbst identifiziert werden ist π dort ein Homöomorphismus. Somit ist $\pi(U)$ eine offene Umgebung von p (da π^{-1} stetig ist).

Fall 2: $\pi^{-1}(p) = \{x, y\} \subset K$ und x und y sind keine Eckpunkte der Quadrate

Da jede Kante eines Quadrates mit genau einer anderen Kante verklebt wird, gibt es eindeutig bestimmte Quadrate mit $x \in Q_i$, $y \in Q_j$. Sei zunächst x in der rechten Kante von Q_i und y in der linken Kante von Q_j . Wähle Halbkreise U_x um x in Q_i und U_y um y in Q_j , mit selben Radius und klein genug sodass diese keinen Eckpunkt enthalten. U_x ist also ein "linker" Halbkreis und U_y ein "rechter Halbkreis". Da die Kanten durch eine Translation verklebt werden ist $\pi(U_x \cup U_y)$ eine offene Umgebung von p , die homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Das selbe Argument funktioniert auch, wenn x in der linken/oberen/unteren Kante von Q_i ist.

Fall 3: $\pi^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_k\}$ und jedes x_i ist Eckpunkt eines Quadrates.

Idee: Laufe in einem Abstand von $\varepsilon > 0$ (klein genug) um den Punkt p herum.

Beh: Dabei läuft man einen Winkel von $2\pi k_p$ ab für ein $k_p \in \mathbb{N}$ und dieser Weg berandet die ε -Umgebung um p , welche die Verklebung von k_p geschlitzten Kreisscheiben ist.

Diese Verklebung ist homöomorph zu einer Kreisscheibe: Mittels $re^{i\varphi} \mapsto re^{i\varphi k}$ bildet man einen k -Abschnitt der Kreisscheibe homöomorph auf eine der geschlitzten Kreisscheiben ab. Dies lässt sich fortsetzen zu einem Homöomorphismus von der Kreisscheibe auf die Verklebung der Geschlitzten.

Beweis der Beh.:

o.B.d.A. starte bei einer oberen Kante eines Quadrates und die Ecke ist rechts von dieser.

Läuft man nun gegen den Uhrzeigersinn um die Ecken, trifft man als nächstes auf die rechte Kante des Quadrates. Gemäß der Verklebevorschrift ist dies genau eine linken Seite eines anderen Quadrates. Läuft man weiter so trifft man auf die obere Kante des Quadrates. Diese ist wieder verklebt usw... Man überquert die Kanten nach folgendem Schema: untere \rightarrow rechte \rightarrow obere \rightarrow linke \rightarrow untere \rightarrow Jede Kante ist mit genau einer anderen verklebt. Somit überquert man jede Kante maximal einmal. Da es nur endlich viele Kanten gibt, muss man zu der Startkante zurückkommen, somit ist der Weg geschlossen. In jedem Schritt des Schemas läuft man einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ ab. Weil der Weg geschlossen ist, legt man insgesamt einen Winkel von $2\pi k$ zurück. Dabei ist k die Anzahl der Durchläufe des Schemas. Der zurückgelegte Weg berandet die ε -Umgebung um die Ecke. \square

Satz 1.1.8. *Jedes Origami ist kompakt und orientierbar.*

Beweis. Gegeben sei ein Origami X , dass durch Verklebung der Quadrate Q_1, \dots, Q_d , $d \in \mathbb{N}$ entsteht. Da die Vereinigung der Quadrate kompakt und die Quotientenabbildung stetig ist, ist X auch kompakt. Da die Übergangsfunktionen Translationen sind, ist die Jacobi-Matrix jedes Kartenwechsels die Identität, hat also positive Determinante. Somit ist X orientierbar. \square

Satz 1.1.9. *Jedes Origami ist eine endliche Translationsfläche. Dabei sind die Ecken der Quadrate konische Singularitäten für die Translationstruktur.*

Beweis. Satz 1.1.7 und Satz 1.1.8 zeigen, dass jedes Origami eine kompakte 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit ist. Insbesondere zeigt die Fallunterscheidung aus dem Beweis von Satz 1.1.7, dass die Eckpunkte der Quadrate genau die konischen Singularitäten sind (siehe insb. Fall 3). \square

Bemerkung 1.1.10. *Ähnlich zu dem Beweis von Satz 1.1.7 (im Wesentlichen ändert sich nur die Argumentation in Fall 3 leicht) kann man zeigen, dass man endliche Translationsflächen durch folgende allgemeinere Konstruktion erhält.*

Seien P_1, \dots, P_n disjunkte orientierte Polygone in \mathbb{R}^2 . Außerdem sei \mathcal{K} die Menge aller Kanten der Polygone und $\iota: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ eine Involution (also $\iota \circ \iota = \text{id}$), die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\forall k \in \mathcal{K} \text{ ist } \iota(k) \text{ parallel zu } k, \text{ gleich lang und anders orientiert.}$$

Definiere X als Quotientenraum, der durch Verkleben (mittels einer Translation) der Kante k mit $\iota(k)$ entsteht. Ist X zusammenhängend, dann erhält man eine endliche Translationsfläche. Insbesondere folgt aus der Zusatzeigenschaft von ι , dass $k \neq \iota(k)$, $\forall k \in \mathcal{K}$. Somit wird jede Kante mit genau einer anderen verklebt.

Satz 1.1.11. *Jede endliche endliche Translationsfläche erhält man durch eine Konstruktion wie in Bem 1.1.10.*

Beweis. Da X eine Fläche ist, können wir eine Triangulierung wählen. Da X kompakt ist, können wir annehmen, dass diese nur aus endlich vielen Dreiecken besteht. Weiter

können wir die Triangulierung so verfeinern, dass jedes $\sigma \in \Sigma$ eine Ecke ist. Da wir auf $X \setminus \Sigma$ eine Translationsstruktur haben, ist jedes Dreieck euklidisch. Die Urbilder dieser Dreiecke unter passenden Kartenabbildungen sind Dreiecke in der euklidischen Ebene. Also wählen wir für jedes Dreieck eine Kartenabbildung. Da die Übergangsfunktionen Translationen der Ebene sind, sind zusammengehörige Seiten nach Urbild bilden parallel. Mit diesen Dreiecken kann man die Konstruktion aus Bemerkung 1.1.10 durchführen. \square

Bemerkung 1.1.12 (flache Metrik auf einer endlichen Translationsfläche). *X ist die metrische Vervollständigung von $X \setminus \Sigma$ bezüglich der flachen Metrik auf der Translationsfläche $X \setminus \Sigma$. Somit lässt sich die flache Metrik auf $X \setminus \Sigma$ auf ganz X fortsetzen. Die fortgesetzte Metrik ist nicht mehr "flach", denn in den Singularitäten können wir eine Krümmung ungleich 0 haben.*

Bemerkung 1.1.13 (Flächeninhalt einer endlichen Translationsfläche). *Der Flächeninhalt einer Translationsfläche bezüglich der flachen Metrik ist die Summe der Flächeninhalte der Polygone aus Konstruktion 1.1.10. Insbesondere ist der Flächeninhalt unabhängig von der konkreten Wahl der Polygone.*

Bemerkung 1.1.14 (Geschlecht von Origamis). *Zu der Berechnung des Geschlechts benutzen wir die Eulerformel $\chi = 2 - 2g$. Für die Eulercharakteristik zählen wir die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken. Sei d die Anzahl der Quadrate. Zusammen haben die d Quadrate $4d$ Kanten. Da jede Kanten mit genau einer anderen verklebt wird hat das Origami $2d$ Kanten. Die Anzahl der Ecken ist vor der Verklebung $4d$. Allerdings hängt es von der Verklebung ab, wie viele Ecken übrig bleiben, und muss deshalb jedes Mal im konkreten Fall nachgerechnet werden. Sei nun n die Anzahl der Ecken. Die Eulercharakteristik ist nun durch $2 - 2g = \chi = d - 2d + n = -(d - n)$ gegeben. Damit ergibt sich für das Geschlecht die Formel*

$$g = \frac{d-n}{2} + 1.$$

Beispiel 1.1.15. *Die Origamis aus Beispiel 1.1.6 haben Geschlecht $1 = \frac{1-1}{2} + 1$ und $2 = \frac{3-1}{2} + 1$.*

Auch für allgemeine endliche Translationsflächen gibt es eine "einfache" Formel für das Geschlecht.

Satz 1.1.16 (Geschlecht via Umlaufzahlen). *Sei X eine endliche Translationsfläche mit Ecken/Singularitäten Σ . Dann gilt*

$$2g - 2 = \sum_{\sigma \in \Sigma} (k_{\sigma} - 1).$$

Beweis. X entstehe durch Verkleben von d Polygonen. Die Zerlegung von Polygonen in Dreiecke ändert die Eulercharakteristik und die Umlaufzahlen nicht. Damit können wir ohne Einschränkung annehmen, dass alle Polygone Dreiecke sind und die Eckpunkte der Dreiecke gerade durch Σ gegeben sind. Zusammen haben die Dreiecke eine Winkelsumme von $d\pi$. Also gilt $2\pi \sum_{\sigma \in \Sigma} k_{\sigma} = d\pi$, bzw. $\frac{d}{2} = \sum_{\sigma \in \Sigma} k_{\sigma}$. Die d Dreiecke haben $\frac{3}{2}d$ Kanten. Somit ergibt sich für das Geschlecht $2g - 2 = -d + \frac{3}{2}d - |\Sigma| = \sum_{\sigma \in \Sigma} k_{\sigma} - \sum_{\sigma \in \Sigma} 1 = \sum_{\sigma \in \Sigma} (k_{\sigma} - 1)$. \square

Folgerung 1.1.17. *Da die Umlaufzahlen echt positiv sind, ist die rechte Seite der obigen Gleichung nicht negativ. Somit gilt $g(X) \geq 1$ für jede endliche Translationsfläche X .*

Definition 1.1.18 (Stratum). *i) Sei X eine endliche Translationsfläche mit Singularitätenmenge $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Bezeichne mit k_i die Umlaufzahl von σ_i . Außerdem seien die Singularitäten so sortiert, dass $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ gilt. Definiere nun $\alpha_i := k_i - 1$. Dann heißt $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Typ von X .*

ii) Die Menge $\mathcal{H}(\alpha)$ der Isomorphieklassen von endlichen Translationsflächen vom Typ α heißt Stratum.

Bemerkung 1.1.19. *Mit Satz 1.1.16 folgt für jede Translationsfläche X in $\mathcal{H}(\alpha)$*

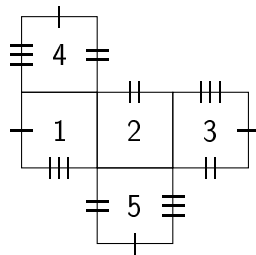
$$2g(X) - 2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

1.2 Origamis als Permutationen

Von Origamis zu Permutationen:

Origamis lassen sich durch zwei Permutationen σ_h und σ_v beschreiben. Die Permutationen erhält man folgendermaßen. Zuerst nummeriert man die d Kästchen von 1 bis d durch. σ_h erhält man durch "ein Kästchen nach rechts gehen" und σ_v durch "ein Kästchen nach oben gehen".

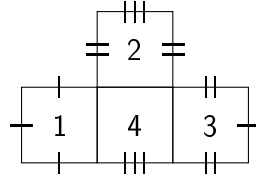
Beispiel 1.2.1. *Zu folgendem Origami erhält man die Permutationen $\sigma_h = (1 \ 2 \ 3) (4 \ 5)$ und $\sigma_v = (1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3)$.*



Von Permutationen zu Origamis:

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\sigma_h, \sigma_v \in S_d$, deren erzeugte Untergruppe transitiv auf $\{1, \dots, d\}$ operiert. Nehme d Quadrate und nummeriere diese von 1 bis d durch. Verklebe nun die rechte Seite des i -ten Quadrats mit der linken Seite des j -ten Quadrats, wenn die Permutation σ_h i auf j abbildet. Analog verklebe die obere Seite des i -ten Quadrats mit der unteren Seite des j -ten Quadrats, wenn die Permutation σ_v i auf j abbildet. Die Forderung, dass die von σ_h und $\sigma_v \in S_d$ erzeugte Untergruppe transitiv auf $\{1, \dots, d\}$ operiert, stellt sicher, dass durch die Verklebung ein zusammenhängender Raum entsteht. Sind alle Kanten verklebt, so erhält man ein Origami vom Grad d .

Beispiel 1.2.2. Aus den Permutationen $\sigma_h = (1\ 4\ 3)(2)$, $\sigma_v = (4\ 2)(3)(1)$ erhält man folgendes Origami.



Die obige Beschreibung führt allerdings nicht zu einer bijektiven Beziehung, denn zum Finden der Permutation wählt man eine Nummerierung der Quadrate. Man erhält zum Beispiel das obige Origami auch durch die Permutationen $\sigma_h = (1, 2, 3)(4)$ und $\sigma_v = (4, 2)(3)(1)$. Verschiedene Nummerierungen führen zu verschiedenen Permutationen. Für ein gegebenes Origami gibt es also keine kanonische Wahl einer Permutation. Dieses Problem lässt sich beheben. Seien also zwei Nummerierungen gegeben. Dann gibt es ein $\gamma \in S_d$, das die erste in die zweite Nummerierung überführt. Sei (σ_h^1, σ_v^1) bzw. (σ_h^2, σ_v^2) das von der ersten bzw. zweiten Nummerierung induzierte Paar von Permutationen. Dann gilt $\sigma_h^1 = \gamma \sigma_h^2 \gamma^{-1}$ und $\sigma_v^1 = \gamma \sigma_v^2 \gamma^{-1}$. Insbesondere gilt dann $\langle \sigma_h^1, \sigma_v^1 \rangle = \gamma \langle \sigma_h^2, \sigma_v^2 \rangle \gamma^{-1}$. Also sind die erzeugten Untergruppen (via γ) konjugiert. Damit haben wir folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.2.3. Sei $d \in \mathbb{N}$. Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen Isomorphieklassen von Origamis vom Grad d und Konjugationsklassen von geordneten Paaren von Permutationen aus S_d , deren erzeugte Untergruppe transitiv auf $\{1, \dots, d\}$ operiert.

1.3 Riemannsche Flächen und Überlagerungen

Ziel dieses Abschnittes ist es Riemannsche Flächen und (verzweigte) Überlagerungen einzuführen. Wir werden hier einige Resultate aufführen, die wir später benötigen werden. Für Beweise oder eine ausführlichere Einführung siehe z.B. [Hat10] oder [For77].

Definition 1.3.1 (Riemannsche Fläche). Eine Riemannsche Fläche X ist eine 2-dimensionale reelle bzw. 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit zusammen mit einem Atlas, für den alle Übergangsfunktionen holomorph sind. (Für den Fall, dass X eine 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit ist, benutzen wir den üblichen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$)

Satz 1.3.2. Sei X eine endliche Translationsfläche. Dann definiert der Translationsatlas auf X auch eine Struktur als Riemannsche Fläche.

Beweis. Sei X eine endliche Translationsfläche mit Singularitäten Σ_X . Außerhalb von Σ_X sind die Übergangsfunktionen per Definition Translationen der Ebene, also holomorph. Jedes $\sigma \in \Sigma_X$ hat eine Umgebung U_σ , die die Verklebung von k_σ Kreisscheiben ist. Diese ist homöomorph zu einer Kreisscheibe via der Abbildung $z \mapsto z^{k_\sigma}$. Somit für

Kartenabbildungen (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j) als Übergangsfunktion $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ nur die Identität, $z \mapsto z^{k_\sigma}$ und $z \mapsto \sqrt[k_\sigma]{z}$ in Frage. id und $z \mapsto z^{k_\sigma}$ sind auf ganz \mathbb{C} holomorph. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\varphi_j(U_j)$ 0 nicht enthält und einfach zusammenhängend ist. Dann ist die k_σ -te Wurzel auf $\varphi_j(U_j)$ holomorph. Insgesamt sind alle Übergangsfunktionen holomorph, also X eine Riemannsche Fläche. \square

Definition 1.3.3 (holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen). *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f: X \rightarrow Y$ stetig. f heißt holomorph, wenn für alle Karten (U, φ) von X und (V, ψ) von Y die Abbildung*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

holomorph ist.

Bemerkung 1.3.4. *Die Riemannschen Flächen zusammen mit den holomorphen Abbildungen bilden eine Kategorie.*

Satz 1.3.5 (lokale Darstellung von holomorphen Funktionen). *Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f: X \rightarrow Y$ holomorph und $x \in X$. So kann man Karten (U, φ) von X und (V, ψ) von Y wählen, wobei $x \in U$, $f(x) \in V$ und für eine geeignete natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^k \quad \forall z \in \varphi(U).$$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt und heißt Grad (oder Ordnung) von f im Punkt x .

Bemerkung 1.3.6. *Sei X eine endliche Translationsfläche und $\sigma \in \Sigma_X$. Die Umlaufzahl k_σ ist der Grad der Abbildung $z \mapsto z_\sigma^k$, welche wir zur Konstruktion einer Karte um σ benutzt haben (vgl. Beweis von Satz 1.1.7).*

Definition 1.3.7 (Überlagerung). *Sei X topologischer Raum. Eine Überlagerung von X ist ein weiterer topologischer Raum Y zusammen mit einer Abbildung $p: Y \rightarrow X$, welche folgende Eigenschaft erfüllt. Für jeden Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung $U_x \subset X$, sodass $p^{-1}(U_x)$ die disjunkte Vereinigung von Mengen $(U_i)_{i \in I}$ ist und $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U_x$ ein Homöomorphismus ist für alle $i \in I$. Außerdem fordern wir, dass p surjektiv ist also für alle $x \in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ nicht leer ist.*

Bemerkung 1.3.8. *i) Die Kardinalität der Faser $p^{-1}(x)$ heißt Grad (oder Blätterzahl) von p (in x).*

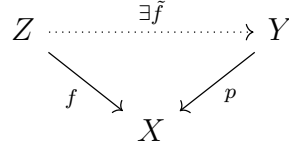
ii) Ist X zusammenhängend, so ist die Blätterzahl n in allen Punkten gleich. Ist $n \in \mathbb{N}$ so nennen wir Y bzw. p eine endliche Überlagerung oder auch eine n -blättrige Überlagerung (von X) und n den Grad der Überlagerung.

iii) Ist $p: Y \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung, so zerfällt die Umgebung von $p^{-1}(x) \subset Y$ lokal in genau n Kopien einer Umgebung von x .

Satz 1.3.9 (Liften von Abbildungen). *Sei $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine basispunkterhaltende Überlagerung (d.h. $p: Y \rightarrow X$ ist eine Überlagerung mit $p(y_0) = x_0$). Weiter*

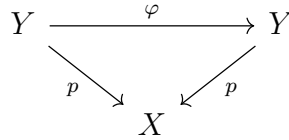
1 Translationsflächen und Origamis

sei $f: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ (d.h. $f(z_0) = x_0$) und Z wegzusammenhängend und lokalwegzusammenhängend. Dann existiert eine Abbildung $\tilde{f}: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mit $f = p \circ \tilde{f}$ genau dann, wenn $\text{Bild}(\pi_1(f)) \subset \text{Bild}(\pi_1(p))$, wobei wir mit π_1 den Fundamentalgruppenfunktoren bezeichnen. \tilde{f} heißt auch Lift von f .



Satz 1.3.10 (eindeutige Liftungseigenschaft). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow X$ stetig. Seien $f_1, f_2: Z \rightarrow Y$ zwei Lifts von f . Gilt $f_1(z) = f_2(z)$ für ein $z \in Z$, dann gilt bereits $f_1 = f_2$.

Definition 1.3.11 (Decktransformation). Seien X, Y topologische Räume und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus $\varphi: Y \rightarrow Y$ heißt Decktransformation, wenn gilt $p \circ \varphi = p$, also das Diagramm



kommutativ ist. Die Decktransformationen bilden mit der Verkettung von Funktionen eine Gruppe, welche wir mit $\text{Deck}(Y/X)$ oder $\text{Deck}(p)$ bezeichnen.

Bemerkung 1.3.12. i) Da φ über p faktorisiert, sind die Fasern $p^{-1}(x)$ φ -invariant, d.h. φ bildet $y \in p^{-1}(x)$ auf ein Element der selben Faser ab.

ii) $\text{Deck}(Y/X)$ operiert auf Y .

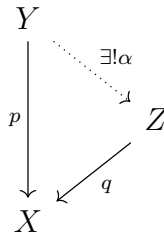
iii) Jede Decktransformation φ ist ein Lift von $\text{id}: X \rightarrow X$. Somit ist nach Satz 1.3.10 φ durch die Angabe des Bildes eines Punktes eindeutig bestimmt. Insbesondere ist id die einzige Decktransformation, die einen Fixpunkt besitzt. Damit folgt, dass die Gruppenoperation von $\text{Deck}(Y/X)$ auf Y frei ist.

Satz 1.3.13. Ist $p: Y \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung, so ist $|\text{Deck}(Y/X)| \leq n$.

Definition 1.3.14 (normale Überlagerung). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. p heißt normal(-e Überlagerung), wenn die zugehörige Gruppenoperation der Decktransformati-
onsgruppe $\text{Deck}(Y/X)$ einfach transitiv auf den Fasern operiert, d.h. für je zwei Punkte $y, y' \in p^{-1}(x)$, $x \in X$ existiert eine Decktransformation $\varphi \in \text{Deck}(Y/X)$ mit $\varphi(y) = y'$.

Bemerkung 1.3.15. Eine n -blättrige Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ ist genau dann normal, wenn $|\text{Deck}(Y/X)| = n$.

Definition 1.3.16 (universelle Überlagerung). Seien X, Y zusammenhängend und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. p heißt universelle Überlagerung von X , wenn sie folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

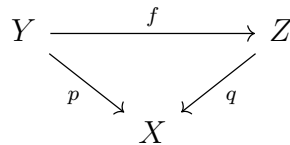


Für jede weitere Überlagerung $q: Z \rightarrow X$ mit Z zusammenhängend existiert genau eine Überlagerung $\alpha: Y \rightarrow Z$, sodass $p = q \circ \alpha$ gilt.

Wir nennen auch Y die universelle Überlagerung von X und schreiben für diese $\tilde{X} = Y$.

Satz 1.3.17. Ist Y einfach zusammenhängend und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann ist $Y = \tilde{X}$ die universelle Überlagerung von X .

Bemerkung 1.3.18 (Kategorie der Überlagerungen). Sei X ein topologischer Raum. Seien $p: Y \rightarrow X$ und $q: Z \rightarrow X$ Überlagerungen von X . Ein Morphismus von Überlagerungen ist eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow Z$, sodass gilt $p = q \circ f$.



Wählen wir Überlagerungen $p: Y \rightarrow X$ über X als Objekte, so erhalten wir die Kategorie der Überlagerungen über X . In dieser Kategorie ist $\text{Deck}(p)$ gerade die Automorphismengruppe des Objekts $p: Y \rightarrow X$.

Satz 1.3.19 (Eindeutigkeit der universellen Überlagerung). Die universelle Überlagerung ist (falls existent) bis auf eindeutigen Isomorphismus (von Überlagerungen) eindeutig bestimmt (d.h. sind \tilde{X}_1 und \tilde{X}_2 universelle Überlagerungen von X so gibt es genau einen Isomorphismus $\alpha: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$).

Das folgende Kriterium zur Existenz der universellen Überlagerung kann noch allgemeiner gefasst werden. Uns genügt hier die folgende speziellere Aussage.

Satz 1.3.20 (Existenz der universellen Überlagerung). Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann existiert die universelle Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

Nun kommen wir zu Riemannschen Flächen zurück und gehen auf deren Zusammenhang mit Überlagerungen ein.

Definition 1.3.21 (verzweigte Überlagerung). Seien Y, X topologische Räume. Eine stetige Abbildung $p: Y \rightarrow X$ heißt verzweigte Überlagerung, wenn es eine diskrete Teilmenge $S \subset X$ gibt, sodass $p|_{Y \setminus p^{-1}(S)}: Y \setminus p^{-1}(S) \rightarrow X \setminus S$ eine Überlagerung ist.

Satz 1.3.22. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine surjektive holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen (insb. ist f nicht konstant), dann ist f eine verzweigte Überlagerung.

Definition 1.3.23 (Verzweigungsordnung). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine holomorphe verzweigte Überlagerung und sei $S \subset X$ die Menge aus Definition 1.3.21. Für $s \in S$ hat p nach Satz 1.3.5 um den Punkt $y \in p^{-1}(s)$ eine lokale Darstellung als $z \mapsto z^{k_y}$ für ein eindeutiges $k_y \geq 1$. k_y heißt Verzweigungsordnung von y (bzgl. p).

Sprechweisen:

- p ist über dem Punkt $s \in X$ verzweigt.
- y heißt Verzweigungspunkt von p
- Ist $k_y = 1$ so sagen wir: p ist unverzweigt in y .
- Ist $k_y \geq 2$ so heißt k_y Verzweigungsordnung von p in y .

Bemerkung 1.3.24. Ist $k_\sigma = 1$, so ist p auch im Punkt σ eine Überlagerung bzw. $p|_{(Y \setminus f^{-1}(\Sigma)) \cup \{\sigma\}}: (Y \setminus f^{-1}(\Sigma)) \cup \{\sigma\} \rightarrow (X \setminus \Sigma) \cup \{\sigma\}$ ist eine Überlagerung.

Bemerkung 1.3.25. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine verzweigte Überlagerung. Für verzweigte Überlagerung definieren wir "Decktransformation" und "normal" analog zu der Definition im unverzweigten Fall. Eine Decktransformation ist ein Homöomorphismus $\varphi: Y \rightarrow Y$ mit $p \circ \varphi = p$. p heißt normal, wenn die zugehörige Decktransformationsgruppe einfach transitiv auf den Fasern operiert.

Satz 1.3.26 (Riemann-Hurwitz). Seien X, Y kompakte, zusammenhängende und orientierbare Riemannsche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ ein verzweigte n -blättrige Überlagerung, $n \in \mathbb{N}$. Mit k_y bezeichnen wir die Verzweigungsordnung von p im Punkt $y \in Y$. Dann gilt

$$2g(Y) - 2 = n(2g(X) - 2) + \sum_{y \in Y} (k_y - 1).$$

Definition 1.3.27 (meromorphe Funktionen). Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ offen. Eine meromorphe Funktion auf U ist eine holomorphe Funktion $f: U' \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $U' \subset U$ offen ist und es gilt:

- i) $U \setminus U'$ ist diskret.
- ii) Für alle $p \in U \setminus U'$ hat f eine Polstelle in p , d.h. $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(U)$.

Bemerkung 1.3.28. Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ offen. Summe und Produkt von zwei meromorphen Funktionen sind wieder meromorph. Somit ist \mathcal{M} mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen eine \mathbb{C} -Algebra. Ist U zusammenhängend, so ist $\mathcal{M}(U)$ ein Körper. Ist X zusammenhängend, so nennen wir $\mathcal{M}(X)$ Funktionenkörper von X .

Satz 1.4.1 (Origamiüberlagerung). *Jedes Origami X induziert eine Überlagerung $p: X^* \rightarrow E^*$ bzw. eine verzweigte Überlagerung $p: X \rightarrow E$. Sie ist d -blättrig, wobei d den Grad von X bezeichnet. p ist über einem Punkt $\infty \in E$ verzweigt. Die Ecken von X sind die Verzweigungspunkte und die Verzweigungsordnung ist gleich der Umlaufzahl.*

Zu diesem Satz gibt es eine Umkehrung.

Satz 1.4.2. *Sei X eine kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und $p: X \rightarrow E$ eine höchstens über $\infty \in E$ verzweigte Überlagerung. Dann wird X mittels p zu einem Origami.*

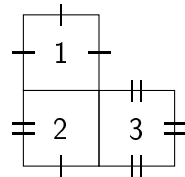
Beweis. Sei Q das Einheitsquadrat, aus welchem E entsteht. Sei v bzw. h das Bild der linken/rechten bzw. oberen/unteren Kante von Q in E . Sei $U := E \setminus (v \cup h)$. Da p außerhalb der Ecken eine Überlagerung ist, ist $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von d Inneren von E . p ist stetig, somit lassen sich die Inneren der Quadrate durch entsprechende Kanten verkleben. wir haben X also mit einer Origamistruktur ausgestattet. \square

Folgerung 1.4.3. *Origamis entsprechen höchstens über einem Punkt verzweigten Überlagerungen $p: X \rightarrow E$.*

Definition 1.4.4 (normales Origami). *Ein Origami X heißt normal, wenn die zugehörige Origamiüberlagerung $p: X \rightarrow E$ normal ist.*

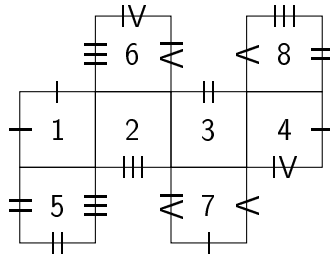
Bemerkung 1.4.5. *Ein Origami ist genau dann normal, wenn es für je zwei Quadrate Q_1, Q_2 eine Decktransformation gibt, die Q_1 auf Q_2 abbildet.*

Beispiel 1.4.6. *Das Origami*



aus Beispiel 1.1.6 ist nicht normal. Denn sonst gäbe es einen Decktransformation φ , die das Quadrat 2 auf das Quadrat 3 abbildet. Da das Quadrat 1 oberhalb des Quadrat 2 liegt und φ stetig ist muss das Quadrat 1 auf das Quadrat oberhalb von 3 abgebildet werden. Dies ist aber 3 selbst. Somit kann es kein solches φ geben.

Das Origami W



ist normal (siehe [HS05, Remark 1]).

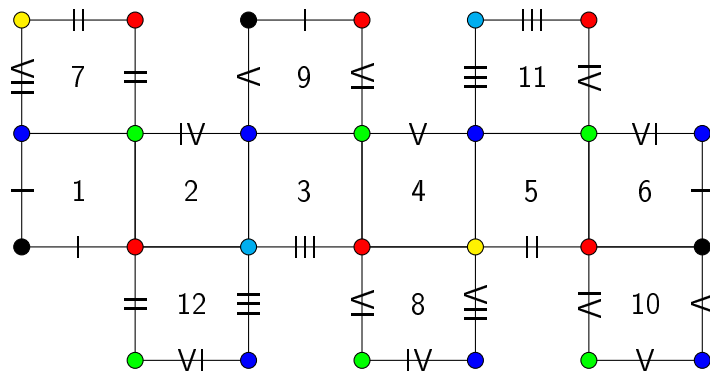
2 Das Origami S

Nun beschäftigen wir uns mit dem zentralen Beispiel dieser Arbeit - dem Origami S .

2.1 Charakterisierungen von S

In diesem Abschnitt werden wir das Origami S und einige Eigenschaften kennenlernen. Außerdem werden wir die verschiedenen Charakterisierungen aus Kapitel 1 an einem konkreten Beispiel sehen.

Das Origami S ist ein Origami vom Grad $d = 12$. Es entsteht durch folgende Verklebungen.



Dabei werden horizontale bzw. vertikale Kanten mit der selben Nummer miteinander verklebt. Durch das Verkleben der Kanten werden auch Eckpunkte mit der selben Farbe identifiziert. S hat die Permutationsdarstellung

$$\begin{aligned} \sigma_h &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) (7 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8) \\ \sigma_v &= (1 \ 7 \ 5 \ 11 \ 3 \ 9) (2 \ 8 \ 4 \ 10 \ 6 \ 12). \end{aligned}$$

Man erhält σ_h durch “nach rechts laufen“ und σ_v durch “nach oben laufen“.

Insgesamt hat das Origami 6 Singularitäten/Ecken. Damit berechnet man mittels der Formel aus Bemerkung 1.1.14 das Geschlecht $g(S)$ von S .

$$g(S) = \frac{12-6}{2} + 1 = 4$$

Läuft man nun im Bild um jede Ecke einer fest gewählten Farbe einmal herum und zählt den Winkel, den man zurückgelegt hat, so erhält man die Umlaufzahlen.

2 Das Origami S

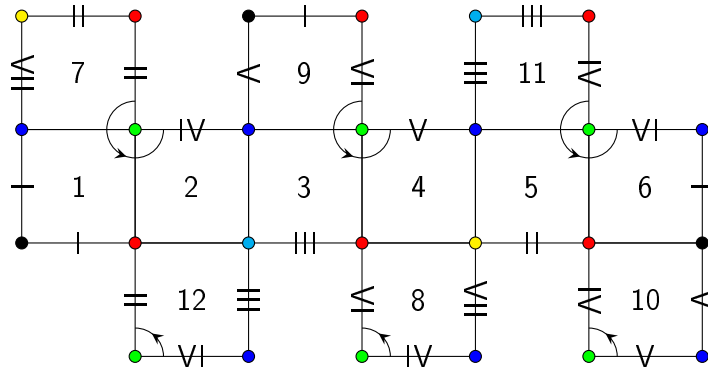


Abbildung 3: Das Origami S mit einem Umlaufweg um die grüne Ecke

Eckpunkt	Umlaufzahl
grün	3
rot	3
blau	3
schwarz	1
gelb	1
hellblau	1

Abbildung 4: Umlaufzahlen

Somit liegt S im Stratum $\mathcal{H}(2, 2, 2)$. Außerdem erhalten wir mit Satz 1.1.16 $2g(S) - 2 = 2 + 2 + 2 = 6$, also $g(S) = 4$. Das deckt sich mit der obigen Rechnung.

Wir können S auch über die Origami-Überlagerung $p: S \rightarrow E$ von S auf den Standardtorus angeben, die jedes der 12 Quadrate von S auf das Standardquadrat abbildet.

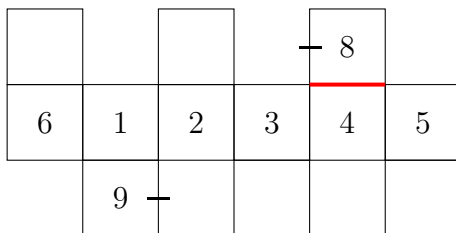
Satz 2.1.1. *Die Origamiüberlagerung $p: S \rightarrow E$ von S ist eine 12-blättrige verzweigte Überlagerung. p hat 3 Verzweigungspunkte von Ordnung 3 und ist über einem Punkt verzweigt.*

Beweis. Da p die Origamiüberlagerung von S ist, folgt bereits aus Satz 1.4.1, dass p eine verzweigte 12-blättrige Überlagerung ist, die über einem Punkt $\infty \in E$ verzweigt ist. Die Umlaufzahlen sind genau die Verzweigungsordnungen. Somit sind die Punkte mit den Farben grün, rot und blau die Verzweigungspunkte von Ordnung 3 von p . \square

Satz 2.1.2. *S ist kein normales Origami.*

Beweis. Wäre p normal, so gäbe es nach Bemerkung 1.4.5 für je zwei $x, y \in \{1, \dots, 12\}$ eine Decktransformation, welche das Quadrat x auf das Quadrat y abbildet. Jede Decktransformation f ist stetig, somit gilt für Quadrate i, j , wobei i der linke Nachbar von j ist (d.h. die rechte Kante von i wird mit der linken von j verklebt), dass $\sigma(i)$ der

linke Nachbar von $\sigma(j)$ ist. Analog natürlich auch für alle anderen Verklebungen. Da Permutationen bijektiv sind, gilt umgekehrt, wenn $\sigma(i)$ der linke Nachbar von $\sigma(j)$ ist, dann ist i der linke Nachbar von j . Sei $i = 1$, $\sigma(i) = 2$ und f die zu σ gehörige Decktransformation. f bildet das Quadrat 1 auf das Quadrat 2 ab. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass die Quadrate 1-6 "eins nach rechts" geschoben werden. Außerdem wird das Quadrat 9 auf das Quadrat 12 und das Quadrat 8 auf das Quadrat 11 abgebildet. In X ist das Quadrat 5 der untere Nachbar von dem Quadrat 11. Aus der obigen Überlegung folgt, dass die untere Kante von 8 mit der oberen Kante von 4 verklebt werden muss (rote Kante unten im Bild). Das ist ein Widerspruch, da in X der untere Nachbar von 8 nicht 4 ist. Also kann es kein solches f geben und p ist nicht normal.



□

2.2 Zerlegung der Origami-Überlagerung

Die Origami-Überlagerung von S hat eine sehr schöne Form. Sie lässt sich nämlich in zwei Überlagerungen q, m aufteilen. Diese Zerlegung werden wir in Kapitel 4 benutzen um die zu S gehörige algebraische Kurve zu bestimmen.

Wir schauen uns zunächst die Überlagerung q an. Sie ist eine Überlagerung von S auf den (2×2) -Torus \mathbb{E} und eine Zwischenüberlagerung der Origami-Überlagerung p . Dabei erhält man \mathbb{E} durch Verkleben von 4 Einheitsquadraten.

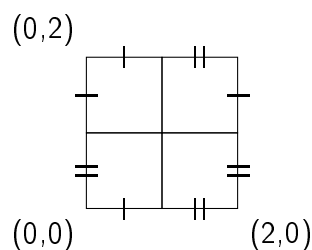


Abbildung 5: der (2×2) -Torus \mathbb{E}

Um q zu beschreiben zerlegen wir S in drei Teile. Dabei sind die dick markierten Kanten doppelt vorhanden, einmal von dem linken Quadrat und einmal von dem rechten Quadrat. In S sind diese Kanten nicht verklebt.

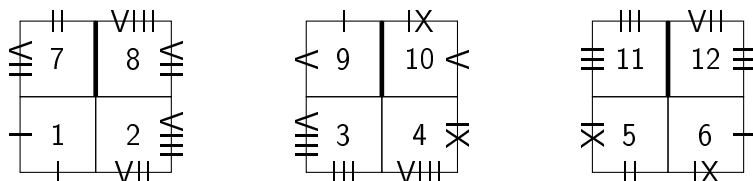


Abbildung 6: Aufteilung von S in drei Teile

q bildet ein Quadrat, das links oben liegt (z.B. 7) auf das linke obere Quadrat von \mathbb{E} ab. Analog für die restlichen Quadrate. Um zu prüfen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist muss man schauen, ob für 2 Quadrate, die in S verklebt wurden auch ihre Bilder in \mathbb{E} an den entsprechenden Kanten verklebt werden. Zum Beispiel wird die obere Kante des Quadrats 7 mit der unteren Kante des Quadrats 5 verklebt. 7 wird auf das Quadrat links oben abgebildet, 5 auf das links unten. Also werden auch die Bilder von 7 und 5 in \mathbb{E} verklebt. Analog wird die linke Kante von 1 mit der rechten Kante von 6 verklebt. 1 wird auf das Quadrat links unten und 6 auf das Quadrat rechts unten abgebildet, also passen auch hier die Verklebungen. Genauso überprüfen man nun die Wohldefiniertheit für alle anderen Kanten.

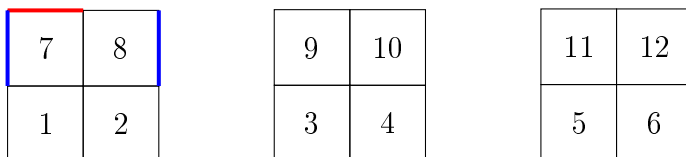


Abbildung 7: Überprüfung der Wohldefiniertheit für das Quadrat 7

Der (2×2) -Torus lässt sich darstellen als $\mathbb{R}^2/2\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{E}$ und der Standardtorus hat die Darstellung $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong E$. Die Multiplikation mit 2 auf \mathbb{C} bildet das Gitter \mathbb{Z}^2 bijektiv auf das Gitter $2\mathbb{Z}^2$ ab, induziert also eine bijektiv Abbildung $h: \mathbb{E} \rightarrow E$. Außerdem erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung $m: \mathbb{E} \rightarrow E, [x] \mapsto [x]$. m bildet jedes einzelne Quadrat von \mathbb{E} auf E ab. Die zusammengesetzte Abbildung $m \circ h: E \rightarrow E$ ist die Multiplikation mit 2 auf der elliptischen Kurve $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Insgesamt erhalten wir folgende Zerlegung der Origami-Überlagerung $p = m \circ q$.

Satz 2.2.1. *Sei $m: \mathbb{E} \rightarrow E$ die Restklassenabbildung von oben. Dann ist m eine unverzweigte 4-blättrige Überlagerung. Außerdem ist m normal mit Decktransformationsgruppe $V_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

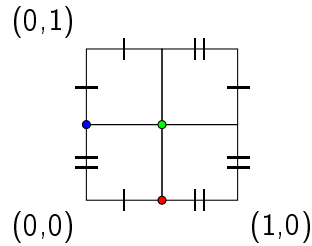
Beweis. Aus der Definition folgt direkt, dass m eine 4-blättrige unverzweigte Überlagerung ist. Betrachten wir die Abbildung, die die Quadrate von \mathbb{E} "eins nach rechts schiebt", konkret die durch die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x+1, y)$ auf \mathbb{E} induzierte Abbildung T_h . Sie ist offensichtlich stetig und bildet Quadrate auf Quadrate ab. Also ist T_h eine Decktransformation. Außerdem induziert die Abbildung $(x, y) \mapsto (x+2, y)$ die Identität auf \mathbb{E} . Somit hat T_h Ordnung 2. Analog folgt, dass die Abbildung T_v , welche durch $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y+1)$ induziert wird, auch eine Decktransformation von Ordnung

2 Das Origami S

2 ist. T_v schiebt die Quadrate "eins nach oben". Somit enthält $\text{Deck}(m)$ 2 Elemente der Ordnung 2. Da m 4-blättrig ist, ist m normal und $\text{Deck}(m) \cong V_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Satz 2.2.2. $q: S \rightarrow \mathbb{E}$ ist eine verzweigte normale 3-blättrige Überlagerung mit Decktransformationsgruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. q hat genau 3 Verzweigungspunkte von Ordnung 3. Diese sind gerade die Singularitäten von S mit Umlaufzahl 3.

Beweis. Durch die Konstruktion von q aus den 3 Teilen folgt sofort, dass jeder Punkt außer der Ecken der vier Quadrate in \mathbb{E} genau 3 Urbilder hat. Als nächstes beobachten wir, dass die Eckpunkte mit Umlaufzahl 1 alle auf die Ecke $(0,0)$ des (2×2) -Torus abgebildet werden. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug und $U \subset \mathbb{E}$ die ε -Umgebung von $(0,0)$. Dann ist $q^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von 3 Kreisscheiben. Also ist $q: S \setminus q^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{E} \setminus A$ mit $A := \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ eine unverzweigte Überlagerung vom Grad 3. Jeder Punkt aus A hat als Urbild unter q genau eine der Singularitäten mit Umlaufzahl 3, also ist q in 3 Punkten jeweils mit Ordnung 3 verzweigt. Außerdem ist q über den 3 Punkten aus A verzweigt, insbesondere über 3 verschiedenen.



Nun schauen wir uns die Decktransformationen von q an. Nach Satz 1.3.13 kann $\text{Deck}(S/\mathbb{E})$ maximal 3 Elemente enthalten. Wir werden eine Decktransformation τ von Ordnung 3 angeben. Dann folgt: q ist normal und $\text{Deck}(S/\mathbb{E}) \cong \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die Abbildung τ bildet die 3 Teile aus Abbildung 6 zyklisch aufeinander ab, d.h. der erste Teil wird auf den Zweiten, der Zweite auf den Dritten und der Dritte auf den Ersten abgebildet. Dabei wird z.B. das Kästchen 1 auf das Kästchen 3 und das Kästchen 7 auf das Kästchen 9 geschickt. Offensichtlich gilt $\tau^3 = \text{id}$. Noch zu zeigen ist, dass τ einen Homöomorphismus auf S definiert. Dazu nimmt man sich wieder zwei Kästchen, die verklebt werden und schaut, ob sie nach Anwendung von τ auch verklebt werden. Z.B. wird das Kästchen 7 oben mit dem Kästchen 5 verklebt. 7 wird unter τ auf den alten Platz von 9 und 5 auf den alten Platz von 1 geschickt. Diese beiden Quadrate werden auch in S verklebt. Analog überprüft man das für alle anderen Paare von verklebten Quadraten. Da τ die Position der Kästchen in den drei Teilen von S nicht ändert, faktorisiert q über τ , d.h. es gilt $q = q \circ \tau$. Somit haben wir die gesuchte Decktransformation von Ordnung 3 gefunden. \square

Satz 2.2.3. $\text{Deck}(S/\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $\tau \in \text{Deck}(S/\mathbb{E})$ aus dem Beweis von Satz 2.2.2. τ ist ein Homöomorphismus von S nach S , der die Quadrate permutiert. Folglich faktorisiert τ auch über p , ist also

ein Element von $\text{Deck}(S/E)$ von Ordnung 3. Angenommen es gibt noch eine andere Decktransformation $f \in \text{Deck}(S/E)$. Wie jede Decktransformation permutiert f die Quadrate. Wegen Bemerkung 1.3.12 iii) können wir f eindeutig durch die Angabe des Bildes des Quadrats 1 festlegen. Da τ die drei Teile von S zyklisch permutiert und die Verkettung von Decktransformationen wieder eine Decktransformation ist können wir ohne Einschränkung annehmen, dass das Bild des Quadrats 1 im ersten Teil von S enthalten ist. Somit wird das Quadrat auf eines der Quadrate 2,7 oder 8 abgebildet. Ist das Bild 2, so haben wir im Beweis von Satz 2.1.2 bereits einen Widerspruch gezeigt. Ein analoges Verfahren für die Bilder 7 und 8 führt auch zu einem Widerspruch. Insgesamt folgt also $\text{Deck}(S/E) = \langle \tau \rangle$. \square

3 Veechgruppe

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Veechgruppen. Dazu werden wir Morphismen von Translationsfläche definieren und die $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion kennenlernen. Die ersten beiden Abschnitte orientieren sich an [Her23, Paragraph 3 und 4].

3.1 Abbildungen zwischen (endlichen) Translationsflächen

In diesem Abschnitt werden wir die Translationsflächen zu einer Kategorie machen. Dazu definieren wir Translationen und affine Abbildungen zwischen Translationsflächen. Das wird uns auch zur Veechgruppe führen.

Definition 3.1.1 (Translationen zwischen (endlichen) Translationsflächen). *i) Seien X, Y Translationsflächen. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt Translation (von Translationsflächen), wenn für alle Karten (U, φ) , (V, ψ) von X bzw. Y und jede Zusammenhangskomponente W von $U \cap f^{-1}(V)$ ein $c \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass gilt:*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = x + c \quad \forall x \in \varphi(W)$$

ii) Seien X, Y endliche Translationsflächen mit Singularitätenmengen Σ_X bzw. Σ_Y . Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt Translation, wenn $f: X \setminus \Sigma_X \rightarrow Y \setminus \Sigma_Y$ eine Translation von Translationsflächen ist.

Analog zu obiger Definition definiert man affine Abbildungen.

Definition 3.1.2 (affine Abbildungen zwischen (endlichen) Translationsflächen). *i) Seien X, Y Translationsflächen. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt affin, wenn für alle Karten (U, φ) , (V, ψ) von X bzw. Y und jede Zusammenhangskomponente W von $U \cap f^{-1}(V)$ ein $A \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass gilt:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = Ax + c \quad \forall x \in \varphi(W)$$

ii) Seien X, Y endliche Translationsflächen mit Singularitätenmengen Σ_X bzw. Σ_Y . Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt affin, wenn $f: X \setminus \Sigma_X \rightarrow Y \setminus \Sigma_Y$ affin ist.

Bemerkung 3.1.3. In obiger Definition haben wir gefordert, dass $A \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Man könnte auch affine Abbildungen mit Matrizen $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ definieren. Allerdings sind wir nur an orientierungserhaltenden Abbildungen interessiert.

Die obigen Definitionen sind von "lokaler Natur". Das heißt sowohl A als auch c dürfen a priori von der Wahl der Karte abhängen. Der nächste Satz sagt, dass A unabhängig von der Kartenwahl ist.

Satz 3.1.4. Seien X, Y Translationsflächen, $f: X \rightarrow Y$ affin und A_1 bzw. A_2 die Matrix aus der Definition bezüglich des Kartenpaares $(U_1, \varphi_1), (V_1, \psi_1)$ bzw. $(U_2, \varphi_2), (V_2, \psi_2)$. Dann gilt $A_1 = A_2$.

Beweis. Sei W eine Zusammenhangskomponente von $(U_1 \cap U_2) \cap f^{-1}(V_1 \cap V_2)$. So gilt für $x \in \varphi_1(W), y \in \varphi_2(W)$

$$\begin{aligned}\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(x) &= A_1 x + c_1 \quad \text{für ein } c_1 \in \mathbb{R}^2, \\ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(y) &= A_2 y + c_2 \quad \text{für ein } c_2 \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Zu zeigen ist $A_1 = A_2$.

Da X und Y Translationsflächen sind, gilt für die Kartenwechsel

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(y) &= y + t \quad \forall y \in \varphi_2(W), \\ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(z) &= z + s \quad \forall z \in \psi_1(f(W)).\end{aligned}$$

mit $t, s \in \mathbb{R}^2$.

Somit folgt für $y \in \varphi_2(W)$

$$\begin{aligned}A_2 y + c_2 &= \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(y) \\ &= ((\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))(y) \\ &= ((\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}))(y + t) \\ &= ((\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(A_1 y + A_1 t + c_1)) \\ &= A_1 y + (A_1 t + c_1 + s).\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $A_2 = A_1$ und $c_2 = (A_1 y + A_1 t + c_1)$. □

Bemerkung 3.1.5. Seien X, Y endliche Translationsflächen und $f: X \rightarrow Y$ affin. Da f außerhalb der Singularitäten eine affine Abbildung von Translationsflächen ist, erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\text{der}: \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ affin}\} \rightarrow \text{GL}_2^+(\mathbb{R}), \quad f \mapsto A_f = \text{der}(f),$$

wobei A_f die wegen Satz 3.1.4 eindeutig definierte Matrix ist.

Definition 3.1.6 (Ableitung). Sei $f: X \rightarrow Y$ affin. Dann heißt $A_f \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ Ableitung von f .

Bemerkung 3.1.7. Die Translationen sind genau die affinen Abbildungen mit Ableitung $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Satz 3.1.8. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ affine Abbildungen von Translationsflächen. Dann ist $(g \circ f): X \rightarrow Z$ affin und es gilt

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$$

Beweis. Wähle Karten (U, φ) von X , (V, ψ) von Y und (W, ϕ) von Z , sodass $A := U \cap f^{-1}(V) \cap (g \circ f)^{-1}(W) \neq \emptyset$. Für $x \in \varphi(A)$ und $c, c' \in \mathbb{R}$ geeignet gilt

$$\begin{aligned} (\phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1})(x) &= (\phi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= (\phi \circ g \circ \psi^{-1})(A_f x + c) \\ &= A_g A_f x + (A_g c + c'). \end{aligned}$$

Aus Satz 3.1.4 folgt $A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$ □

Folgerung 3.1.9. Zusammen mit den Translationen/affinen Abbildungen bilden die Translationsflächen bzw. endlichen Translationsflächen eine Kategorie.

Definition 3.1.10 (affine Gruppe). Sei X eine endliche Translationsfläche. Dann heißt $\text{Aff}(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ ist affiner Homöomorphismus}\}$ affine Gruppe von X .

Der nächste Satz zeigt, dass die Einschränkung auf Homöomorphismen für den Fall $g(X) \geq 2$ keine echte Einschränkung ist.

Satz 3.1.11. Sei X eine endliche Translationsfläche mit Geschlecht $g(X) \geq 2$. So ist jede affine Abbildung $f: X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei \mathcal{T} eine Triangulierung von X , wobei jedes $\sigma \in \Sigma_X$ eine Ecke ist. Dann ist $\mathcal{T}' := f^{-1}(\mathcal{T})$ auch eine Triangulierung von X und jedes $\sigma \in \Sigma_X$ ist eine Ecke. Für jede affine Abbildung f ist $f|_{X \setminus \Sigma_X}: X \setminus \Sigma_X \rightarrow X$ eine Überlagerung vom Grad $d \geq 1$. Somit hat jedes Dreieck und jede Kante genau d Urbilder unter f . Jede Ecke in \mathcal{T} hat mindestens ein und höchstens d Urbilder, da $f|_{X \setminus \Sigma_X}$ eine Überlagerung ist, die sich stetig auf Σ_X fortsetzen lässt (das ist gerade f). Somit gilt $2 - 2g(X) = f_{\mathcal{T}'} + k_{\mathcal{T}'} + e_{\mathcal{T}'} \leq d f_{\mathcal{T}} - d k_{\mathcal{T}} + d e_{\mathcal{T}} = d(2 - 2g(X))$, wobei $f_{\mathcal{T}}$ die Anzahl der Dreiecke, $k_{\mathcal{T}}$ die Anzahl der Kanten und $e_{\mathcal{T}}$ die Anzahl der Ecken in der Triangulierung \mathcal{T} bezeichnet (analog für \mathcal{T}'). Da $g(X) \geq 2$ ist, ist $2 - 2g(X) > 0$. Somit folgt $d = 1$. Also ist f ein Homöomorphismus. □

Satz 3.1.12. Ist $f: X \rightarrow X$ ein affiner Homöomorphismus von endlichen Translationsflächen, so ist $\text{der}(f) \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow X$ affin mit Ableitung $A := \text{der}(f) \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$. X entstehe aus den Polygonen P_i , $i = 1, \dots, n$ durch Verkleben gemäß der Konstruktion aus Bemerkung 1.1.10. Weiter sei φ_A die durch A induzierte lineare Abbildung. Da φ_A linear und invertierbar ist, ist $\varphi_A(P_i)$ auch ein Polygon. X entsteht durch Verklebung der $\varphi_A(P_i)$, weil f ein Homöomorphismus ist. Somit ist der Flächeninhalt der P_i 's gleich dem Flächeninhalt der $\varphi_A(P_i)$'s. Der Flächeninhalt von $\varphi(X)$ ist aber auch gleich dem Flächeninhalt von X multipliziert mit $|\det(A)|$. Also hat A Determinante 1 und es gilt $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. □

Folgerung 3.1.13. Zusammen mit Satz 3.1.8 erhält man einen Gruppenhomomorphismus $\text{der}: \text{Aff}(X) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$, $f \mapsto \text{der}(f)$.

Definition 3.1.14 (Veechgruppe, Translationsautomorphismen). Sei X eine endliche Translationsfläche.

i) $\Gamma(X) := \text{Bild}(\text{der})$ heißt Veechgruppe von X

ii) $\text{Trans}(X) := \text{Kern}(\text{der})$ heißt die Gruppe der Translationsautomorphismen von X

Satz 3.1.15. Sei X ein Origami und $p: X \rightarrow E$ die Origamiüberlagerung. Dann gilt $\text{Trans}(X) = \text{Deck}(p)$.

Beweis. Jede Decktransformation φ permutiert die Quadrate, aus denen X entsteht. Außerhalb der Ecken wird das durch eine Translation in der Ebene beschrieben. Also ist φ ein Translationsautomorphismus von X .

Jedes f bildet die Singularitäten von X auf die Singularitäten von X ab. Außerhalb der Singularitäten ist f durch eine Translation gegeben, bildet also Quadrate auf Quadrate ab. Folglich gilt $p \circ f = p$. Da f nach Voraussetzung ein Homöomorphismus von X nach X ist, ist f eine Decktransformation von p . \square

Folgerung 3.1.16. $\text{Trans}(S) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (siehe Satz 2.2.3).

Bemerkung 3.1.17. Sei X ein Origami mit Ecken Σ_X und $f \in \text{Trans}(X)$. f bildet nach der Definition von affinen Abbildungen die Singularitäten auf Singularitäten ab. Da f außerhalb der Ecken durch eine Translation gegeben ist, ändert f die Umlaufzahl nicht. Es gilt also $k_\sigma = k_{f(\sigma)}$ für alle $\sigma \in \Sigma$. Jedes σ ist die linke/rechte, untere/obere Ecke eines Quadrates. Hat X zwei Ecken mit unterschiedlicher Umlaufzahl, so kann X nicht normal sein. Dies ist ein alternativer Beweis von Satz 2.1.2.

3.2 $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion

Im letzten Abschnitt haben wir die Veechgruppe über affine Abbildungen definiert. Wir werden uns nun die $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion anschauen und die Veechgruppe darüber charakterisieren. Diese Herangehensweise hat eine geometrische Interpretation, welche wir im nächsten Abschnitt zur Bestimmung der Veechgruppe von S benutzen werden.

Bemerkung 3.2.1. Sei $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\varphi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$, die durch A induzierte lineare Abbildung. Weiter sei X eine Translationsfläche mit Translationsatlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Dann ist $(U_i, \varphi_A \circ \varphi_i)_{i \in I}$ ein Translationsatlas auf X . Schreibe für X mit diesem Atlas X_A .

Beweis. Seien $i, j \in I$, $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ Karten mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und $U \subset U_i \cap U_j$ eine Zusammenhangskomponente. Dann gilt für alle $x \in \varphi_i(U)$

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) = x + c$$

3 Veechgruppe

für ein $c \in \mathbb{R}^2$. Somit gilt für alle $y \in \varphi_A(\varphi_i(U))$

$$\begin{aligned} (\varphi_A \circ \varphi_j) \circ (\varphi_A \circ \varphi_i)^{-1}(y) &= (\varphi_A \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_A^{-1})(y) \\ &= A(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(A^{-1}(y)) \\ &= A(A^{-1}y + c) \\ &= y + Ac \end{aligned}$$

Wegen $Ac \in \mathbb{R}^2$ ist $(U_i, \varphi_A \circ \varphi_i)_{i \in I}$ ein Translationsatlas auf X . □

Bemerkung 3.2.2. *Es gilt $\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$ für $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Somit definiert die Vorschrift $A \cdot X := X_A$ eine Gruppenaktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf den Translationsflächen.*

Satz 3.2.3. *Die Gruppenaktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf den Translationsflächen lässt sich auf endliche Translationsflächen fortsetzen.*

Beweis. Sei X eine endliche Translationsfläche, die aus den Polygonen P_1, \dots, P_n durch Verkleben gemäß der Konstruktion aus Bemerkung 1.1.10 entsteht. Sei dazu

$\pi: \bigcup_{i=1}^n P_i \rightarrow X$ die Quotientenabbildung. Die endliche Translationsfläche X_A entsteht durch das Verkleben der entsprechenden Kanten der $\varphi_A(P_i)$. Dabei ist die Quotientenabbildung durch $\pi_A := \varphi_A \circ \pi \circ \varphi_A^{-1}: \bigcup_{i=1}^n \varphi_A(P_i) \rightarrow X_A$ gegeben. Nun müssen wir noch zeigen, dass das unabhängig von der Wahl der P_i ist. Seien dazu P'_1, \dots, P'_m weitere Polygone, die durch Verklebung X ergeben und $\pi': \bigcup_{j=1}^m P'_j \rightarrow X$ die Quotientenabbil-

dung. Wir erhalten analog eine Abbildung $\pi'_A := \varphi_A \circ \pi' \circ \varphi_A^{-1}: \bigcup_{i=1}^n \varphi_A(P_i) \rightarrow X'_A$. Zu zeigen ist also, dass X_A und X'_A als Translationsflächen isomorph sind. Sei E die Menge der Ecken von X also die Bilder der Eckpunkte der P_i unter π und E_A die Menge der Ecken von X_A . Dann ist $E_A = \pi_A(\varphi(E))$. $X \setminus E$ und $X_A \setminus E_A$ sind Translationsflächen und wir erhalten $X_A \setminus E_A$ aus $X \setminus E$ gemäß der Aktion von A für Translationsflächen (siehe Bemerkung 3.2.1). Insbesondere sind $X_A \setminus E_A$ und $X \setminus E$ als Mengen gleich. Da X_A bzw. X die metrische Vervollständigung von $X_A \setminus E_A$ bzw. $X \setminus E$ ist, sind auch X_A und X als Mengen gleich. Folglich sind auch X_A und X'_A als Mengen gleich. Da wir in beiden Konstruktionen die Polygone mit der selben Abbildung φ_A modifiziert haben stimmt die Translationsstruktur auf X_A mit der auf X'_A überein. Somit sind X_A und X'_A auch als Translationsflächen isomorph. □

Bemerkung 3.2.4. *Durch den obigen Beweis sieht man auch, dass X und X_A dieselbe Anzahl an Singularitäten (Eckpunkte) haben. Außerdem wird der Umlaufwinkel nicht verändert. Somit liegt X im selben Stratum $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wie X_A . Also operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H}(\alpha)$.*

3 Veechgruppe

Satz 3.2.5 (Veechgruppe als Stabilisator der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion). *Sei X eine endliche Translationsfläche und $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$X \cong X_A \Leftrightarrow A \in \Gamma(X).$$

Die Veechgruppe von X ist also genau der Stabilisator von X bezüglich der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion.

Beweis. Sei X eine endliche Translationsfläche und $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Die Identität $\mathrm{id}: X \rightarrow X$ auf X induziert eine affine Abbildung $\iota_A: X \rightarrow X_A$. Wähle (U_i, φ_i) bzw. $(U_i, \varphi_A \circ \varphi_i)$ als Karte von X bzw. X_A . Dann gilt für $x \in \varphi(U_i)$

$$((\varphi_A \circ \varphi_i) \circ \iota_A \circ \varphi_i^{-1})(x) = (\varphi_A \circ \varphi_i \circ \varphi_i^{-1})(x) = Ax.$$

Es folgt $\mathrm{der}(\iota_A) = A$.

“ \Rightarrow “:

Sei $X_A \cong X$. Dann ist $\iota_A \in \mathrm{Aff}(X)$. Somit ist $A = \mathrm{der}(\iota_A)$ im Bild von der , also $A \in \Gamma(X)$.

“ \Leftarrow “:

Sei $A \in \Gamma(X) = \mathrm{Bild}(X)$. Dann gibt es ein $f \in \mathrm{Aff}(X)$ mit $\mathrm{der}(f) = A$. Somit ist $\iota_A \circ f^{-1}: X \rightarrow X_A$ eine affine Abbildung. Weiter gilt $\mathrm{der}(\iota_A \circ f^{-1}) = AA^{-1} = I_2$. Also ist $\iota_A \circ f^{-1}$ eine Translation und somit ein Isomorphismus von endlichen Translationsflächen. \square

Mit dieser Charakterisierung erhält man aus der Theorie der Gruppenoperationen folgende Aussage.

Folgerung 3.2.6. *Sei X eine endliche Translationsfläche und $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\Gamma(X_A) = A\Gamma(X)A^{-1}.$$

3.3 Veechgruppe von S

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass für ein Origami die Veechgruppe immer eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist. Außerdem bestimmen wir die Veechgruppe von S .

Satz 3.3.1. *Sei X ein Origami, $p: X \rightarrow E$ die Origamiüberlagerung. Die Translationsstruktur auf $X^* = X \setminus p^{-1}(\infty)$ induziert eine Translationsstruktur auf der universellen Überlagerung $u: \widetilde{X}^* \rightarrow X^*$ und es gilt $\Gamma(\widetilde{X}^*) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Durch Liften der Translationsstruktur auf X^* mittels u erhalten wir eine Translationsstruktur auf \widetilde{X}^* . Konkret funktioniert das wie folgt. Sei eine Karte (U_i, φ_i) von X^* mit einem geeigneten U_i . Dann gibt es nach der Überlagerungseigenschaft von u Mengen $W_j \subset \widetilde{X}^*$, sodass $u^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^n W_j$ und $u|_{W_j}: W_j \rightarrow U_i$ ein Homöomorphismus ist. Wir wählen $(W_j, \varphi_i \circ u)$ als Karte für \widetilde{X}^* . Mit solchen U_i können wir X^* überdecken. Die zugehörigen W_j überdecken dann ganz \widetilde{X}^* . Außerdem sind alle

3 Veechgruppe

W_j offen. Somit ist $(W_j, \varphi_i \circ u)$ ein Atlas auf \widetilde{X}^* . Für die Übergangsfunktionen gilt $(\varphi_i \circ u) \circ (\varphi_j \circ u)^{-1} = \varphi_j \circ u \circ u^{-1} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Folglich sind alle Übergangsfunktionen Translationen und $(W_j, \varphi_i \circ u)$ ist ein Translationsatlas auf \widetilde{X}^* .

$p \circ u: \widetilde{X}^* \rightarrow E^*$ ist als Verkettung von Überlagerungen wieder eine Überlagerung. Da \widetilde{X}^* einfach zusammenhängend ist, ist nach Satz 1.3.17 $p \circ u: \widetilde{X}^* \rightarrow E^*$ die universelle Überlagerung von E^* . Die Restklassenabbildung $E \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert eine Überlagerung $w: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow E^*$. Die universelle Eigenschaft der universellen Überlagerung liefert also eine eindeutige Abbildung $h: \widetilde{X}^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ mit $w \circ h = p \circ u$.

Sei $\tilde{f} \in \text{Aff}(\widetilde{X}^*)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ ist eine offenen Teilmenge von \mathbb{R}^2 , somit ist h lokal eine Kartenabbildung. Also induziert \tilde{f} via h eine affine Abbildung $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Diese ist lokal gegeben durch $\hat{f}(z) = Az + b$ mit $A = \text{der}(\hat{f}) = \text{der}(\tilde{f})$ und $b \in \mathbb{Z}^2$. Aus der Wohldefiniertheit von \hat{f} folgt $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Folglich gilt $\Gamma(\widetilde{X}^*) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Sei $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann induziert $z \mapsto Az$ eine Abbildung $f: E^* \rightarrow E^*$. Diese können wir zu einer Abbildung $\tilde{f}: \widetilde{X}^* \rightarrow \widetilde{X}^*$ liften. Dabei ändern wir die Ableitung nicht. Somit gilt $\text{der}(\tilde{f}) = \text{der}(f) = A$. Also ist $A \in \text{Bild}(\text{der}) = \Gamma(\widetilde{X}^*)$. Folglich gilt $\Gamma(\widetilde{X}^*) \supset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Insgesamt ist $\Gamma(\widetilde{X}^*) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. □

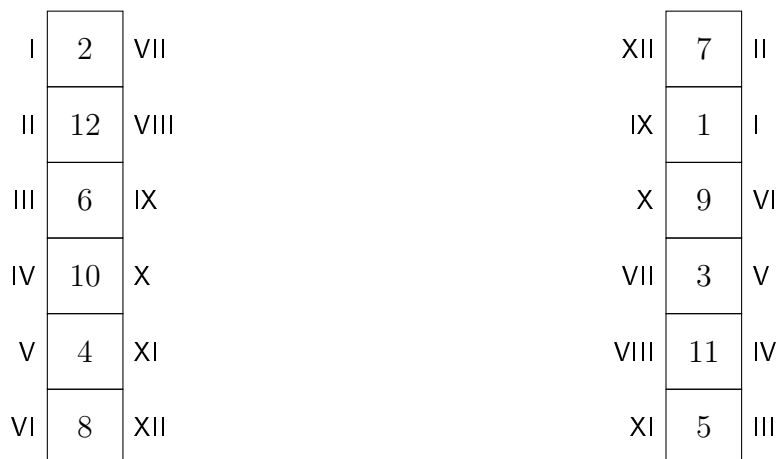
Satz 3.3.2. *Sei X ein Origami. Dann gilt $\Gamma(X) \subset \Gamma(\widetilde{X}^*)$. Insbesondere folgt mit Satz 3.3.1 $\Gamma(X) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Sei $f \in \text{Aff}(X) = \text{Aff}(X^*)$ und $A = \text{der}(f) \in \Gamma(X)$. Wir können f zu einer affinen Abbildung $\tilde{f}: \widetilde{X}^* \rightarrow \widetilde{X}^*$ liften. Dabei verändern wir die Ableitung nicht. Somit gilt $A = \text{der}(f) = \text{der}(\tilde{f}) \in \Gamma(\widetilde{X}^*)$. □

Satz 3.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind in der Veechgruppe von S .

Beweis. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir zeigen, dass die Translationsfläche $A \cdot S$ zu S als Translationsfläche isomorph ist. Dann folgt mit Satz 3.2.5, dass A in der Veechgruppe von S ist. Dazu nutzen wir das Konzept der vertikalen (bzw. horizontalen) Zylinderzerlegung. Zuerst wählen wir das Quadrat 8. Dann laufen wir solange nach oben, bis wir wieder bei dem Quadrat 8 ankommen. Haben wir alle Quadrate von S erreicht, so sind wir fertig. Wenn nicht wählen wir ein Quadrat, welches noch nicht vorgekommen ist und laufen auch wieder nach oben, bis wir zu diesem zurückkommen. Eine solche Einteilung nennt man vertikale Zylinderzerlegung. Für S sieht eine vertikale Zylinderzerlegung folgendermaßen aus.

3 Veechgruppe



Dabei sind die Kanten an der Seite (zur Übersicht) durchnummeriert. Kanten mit der selben Zahl sind in S verklebt. Außerdem ist die oberste Kante mit der untersten Kante verklebt. Die Matrix A bildet das Einheitsquadrat auf ein Parallelogramm mit Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ ab. Jedes Quadrat in S wird also zu so einem Parallelogramm in $A \cdot S$. Dabei werden die Verklebungen respektiert. Somit erhält man die Translationsfläche $A \cdot S$ durch folgende Verklebung.

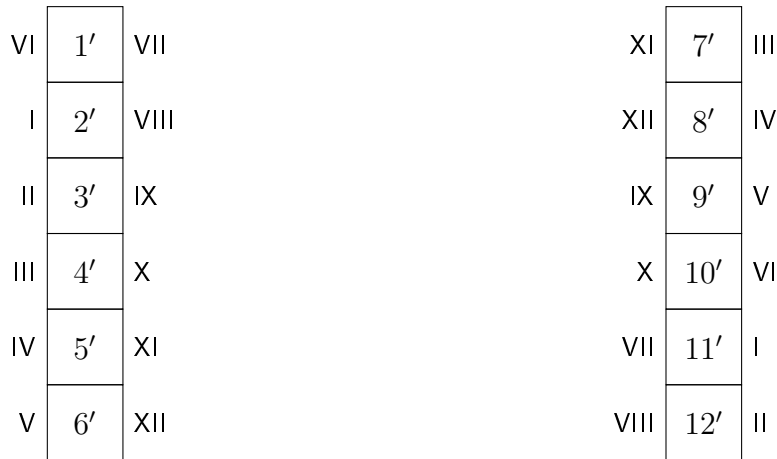


Nun scheiden wir unten ein Dreieck ab und fügen es oben an um wieder zwei Rechtecke zu erhalten. Das ändert die Translationsstruktur auf $A \cdot S$ nicht, da wir an den Ecken der Kanten V , VI bzw. XII abscheiden und somit keine Kante geteilt wird.

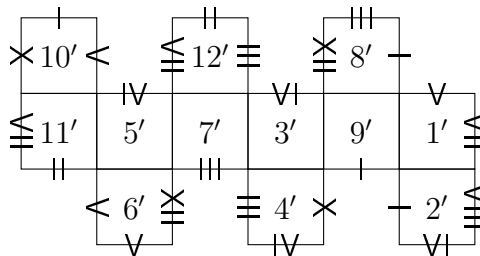
3 Veechgruppe



Als Nächstes ersetzen wir die schräge Unterteilung im Inneren der Rechtecke durch eine horizontale Unterteilung. Dabei erhalten wir eine Aufteilung in Quadrate (das ändert die Translationsstruktur ebenfalls nicht).



Der letzte Schritt ist sich zu überzeugen, dass die Kästchen 1'-12' mit diesen Verklebungen auch das Origami S definieren. Dafür kann man die Quadrate passend anordnen und die Verklebungen mit denen von S vergleichen (siehe z.B. Bild von S am Anfang von Kapitel 2).



Somit ist A in der Veechgruppe von S .

Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wählen wir eine horizontale Zylinderzerlegung, d.h. wir führen die selbe Konstruktion wie oben durch, aber laufen nach rechts, statt nach oben. Für diese Zerlegung führen wir dann den analogen Prozess wie oben durch. Folglich ist auch B in der Veechgruppe von S . \square

Satz 3.3.4. Die Veechgruppe $\Gamma(S)$ von S ist $SL_2(\mathbb{Z})$.

Beweis. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugen $SL_2(\mathbb{Z})$. Außerdem gilt $S = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$. Mit Satz 3.3.3 folgt die Behauptung. \square

4 Das Origami S als algebraische Kurve

Wie jede Riemannsche Fläche hat S eine Darstellung als algebraische Kurve. Ziel dieses Kapitels ist es konkreten Gleichung(-en) für S zu bestimmen.

4.1 Der Automorphismus c

Konstruktion eines Lifts von $-I_2$:

Die Multiplikation mit -1 auf \mathbb{R}^2 bildet das Gitter \mathbb{Z}^2 auf sich selbst ab. Somit erhalten wir einen induzierten Automorphismus auf E . Dieser hat Ableitung $-I_2$. Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Veechgruppe $\Gamma(S)$ von S $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, insbesondere ist $-I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$. Folglich lässt sich die Multiplikation mit -1 auf E zu einem Automorphismus auf S mit Ableitung $-I_2$ liften. Wir werden nun einen speziellen Lift c konstruieren. Die Konstruktion in Bildern sieht man in Abbildung 8.

Als Erstes bemerken wir, dass die Multiplikation mit -1 durch die Drehung um 180° des Einheitsquadrates, aus dem E entsteht, induziert wird. c können wir dadurch beschreiben, dass wir jedes Quadrat von S um 180° drehen und dann die selben Kanten wie davor verkleben. Zur Übersicht verwenden wir eine andere ebene Darstellung von S . Da wir beim Zusammensetzen der rotierten Quadrate eine Wahl getroffen haben (z.B. Wahl des Bildes von Quadrat 1), ist c als Lift nicht eindeutig z.B. ist auch $\tau \circ c$ für das τ aus Satz ?? ein Lift von $-I_2$. Anschaulich können wir c auch folgendermaßen beschreiben: Drehe jedes Quadrat um 180° , vertausche die obere und untere Reihe und drehe die Reihenfolge der Quadrate um. Als Letztes verschiebe die obere Reihe eins nach links und die untere eins nach rechts (dabei gelangt das Quadrat am linken bzw. rechten Ende ans rechte bzw. linke Ende). Durch wiederholtes Anwenden von c sehen wir, dass $c^6 = \text{id}$ und $c^i \neq \text{id}$ für $i = 1, \dots, 5$. Folglich hat c Ordnung 6.

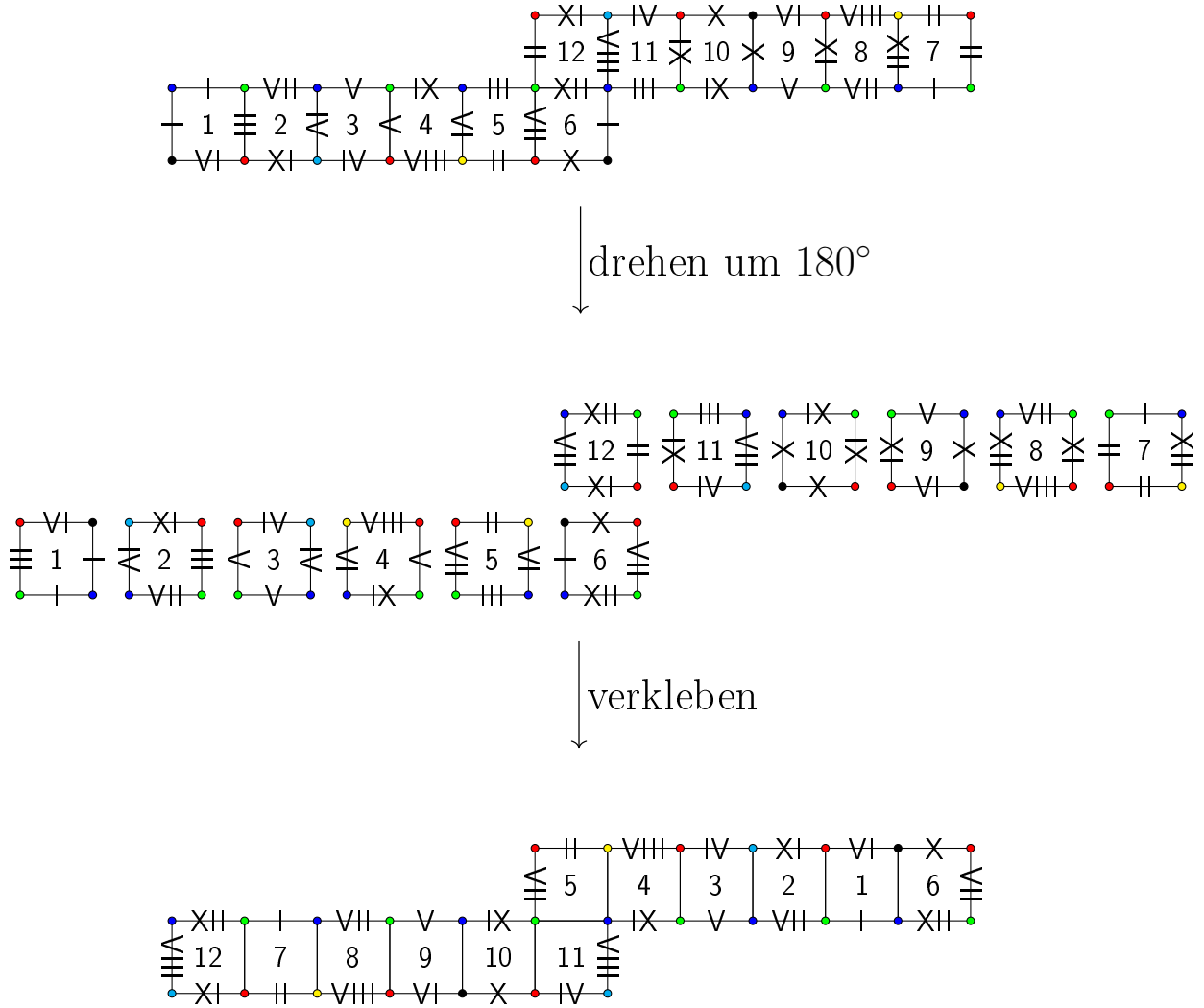


Abbildung 8: Konstruktion von c

Satz 4.1.1. $\pi_c: S \rightarrow S/\langle c \rangle$ ist eine verzweigte 6-blättrige normale Überlagerung mit Decktransformationsgruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Beweis. Seien $y, \tilde{y} \in S$. y, \tilde{y} werden genau dann in $S/\langle c \rangle$ identifiziert, wenn ihre Bahnen $\{c^i(y) \mid i = 1, \dots, 5\}$, $\{c^i(\tilde{y}) \mid i = 1, \dots, 5\}$ übereinstimmen. Sei nun $x \in S/\langle c \rangle$ die Äquivalenzklasse von y . Dann ist die Faser $\pi_c^{-1}(x)$ von x genau die Bahn $\{c^i(y) \mid i = 0, \dots, 5\}$. Durch explizites Hinschreiben der ebenen Darstellungen von $S, c^1(S), \dots, c^5(S)$ sehen wir, dass die Faser jedes Punktes von $S \setminus \Sigma_S$ 6 (verschiedene) Elemente enthält, wobei Σ_S die Menge aller Ecken von S ist. Da c ein Automorphismus der Ordnung 6 von S ist folgt, dass $\pi_{c|_{S \setminus \Sigma_S}}: S \setminus \Sigma_S \rightarrow (S/\langle c \rangle) \setminus c(\Sigma_S)$ eine 6-blättrige Überlagerung ist. Offensichtlich ist c eine Decktransformation. $\langle c \rangle$ operiert transitiv auf den Fasern, weil diese gerade die Bahnen von Elementen $y \in S$ sind. Also gilt $\text{Deck}(\pi_c) = \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und π_c ist normal. \square

Satz 4.1.2. π_c ist über 4 verschiedenen Punkten verzweigt. Die Verzweigungspunkte sind die Singularitäten von S . Die Ecken mit Umlaufzahl 3 haben Verzweigungsordnung 6, die mit Umlaufzahl 1 haben Verzweigungsordnung 2.

Beweis. Im Beweis des letzten Satzes haben wir gesehen, dass die Faser eines $x \in S/\langle c \rangle$ die Bahn eines Urbildes $y \in \pi_c^{-1}(x)$. Die Verzweigungspunkte sind genau die Punkte $x \in S$, deren Bahn weniger als 6 Elemente hat, also $c^i(x) = c^j(x)$ für geeignete $i \neq j$, $i, j \in \{0, \dots, 5\}$. Aus der Konstruktion von c erkennen wir sofort, dass die Ecken mit Umlaufzahl 3 Fixpunkte von c sind. Somit besteht deren Bahn nur aus einem Element und die Verzweigungsordnung ist 6. Außerdem lesen wir ab, dass die Ecken mit Umlaufzahl 1 alle in der selben Bahn der Länge 3 liegen. Dabei bildet c die Ecken zyklisch nach folgendem Schema ab: schwarz \rightarrow gelb \rightarrow orange. Sei $x' \in S/\langle c \rangle$ das Bild dieser Ecken. Jeder Punkt in einer hinreichend kleinen Umgebung um x' hat 6 Urbilder. Da c zyklisch ist, folgt dass sich diese gleichmäßig auf Umgebungen der drei Ecken verteilen, also liegen in der Umgebung jeder Ecke 2 Urbilder. Folglich hat jede Ecke mit Umlaufzahl 1 Verzweigungsordnung 2. \square

4.2 Die Gleichung(-en) für S

Mithilfe des Automorphismus c werden wir nun die zu S gehörige algebraische Kurve bestimmen.

Satz 4.2.1. $S/\langle c \rangle$ hat Geschlecht 0 und ist somit als Riemannsche Fläche isomorph zur Riemannschen-Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Insbesondere gilt $\mathcal{M}(S/\langle c \rangle) \cong \mathbb{C}(x)$ für ein über \mathbb{C} transzendentes Element x .

Beweis. Mit Satz 4.1.2 und der Formel von Riemann-Hurwitz (Satz 1.3.26) folgt $2g(S) - 2 = 6 = 6(2g(S/\langle c \rangle) - 2) + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$, also $g(S/\langle c \rangle) = 0$. Somit ist $S/\langle c \rangle$ als Riemannsche Fläche isomorph zu $\widehat{\mathbb{C}}$. Der Funktionenkörper von $\widehat{\mathbb{C}}$ ist $\mathbb{C}(x)$ für ein über \mathbb{C} transzendentes x . \square

Satz 4.2.2. Es gibt ein $u \in \mathcal{M}(S)$ mit $u^6 \in \mathcal{M}(S/\langle c \rangle)$. Insbesondere gilt $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, u)$.

Beweis. Wir haben in Satz 4.1.1 gesehen, dass $q: S \rightarrow S/\langle c \rangle$ eine normale Überlagerung vom Grad 6 ist. Mit Satz 1.3.30 folgt, dass $\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x)$ eine Galois-Erweiterung vom Grad 6 mit Galoisgruppe $\text{Gal}(\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x)) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist. Nach dem Satz vom primitiven Element ist jede endliche Galois-Erweiterung einfach. Somit existiert ein $u \in \mathcal{M}(S)$ mit $\mathcal{M}(S) \cong (\mathbb{C}(x))[u]$. Da die Galoisgruppe zyklisch von Ordnung 6 ist, ist $\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x)$ eine elementare Radikalerweiterung. Folglich können wir ohne Einschränkung $u^6 \in \mathbb{C}(x)$ annehmen. \square

Zum Bestimmen der konkreten rationalen Funktion $u^6 \in \mathbb{C}(x)$ benutzen wir die Zerlegung der Origami-Überlagerung.

Satz 4.2.3 (eine andere Darstellung von $\mathcal{M}(S)$). Es gilt $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, y, z)$ mit $y^2 = x^3 - x$ und $z^3 = y^2 = x^3 - x$.

Beweis. Es ist bekannt, dass $E \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ eine elliptische Kurve ist (siehe: [Sil09, Ch. 6, Prop. 3.6]). Außerdem bildet die Multiplikation mit i (Drehung um 90°) das Gitter \mathbb{Z}^2 bijektiv auf sich selbst ab, induziert also einen Automorphismus der Ordnung 4 auf E . Andererseits ist die Abbildung $(x, y) \mapsto (-x, iy)$ ein Automorphismus der Ordnung 4 auf der Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^3 - x$. Da es bis auf Isomorphie nur eine elliptische Kurve mit einem Automorphismus der Ordnung 4 gibt (siehe: [Sil09, Ch. 3, Thm. 10.1]), folgt dass E die elliptische Kurve $y^2 = x^3 - x$ ist. Dabei entspricht der Eckpunkt von \mathbb{E} dem Punkt ∞ auf der elliptischen Kurve. Die Überlagerung q aus Kapitel 2.2 induziert also eine injektive Abbildung $\mathbb{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{M}(S)$. Außerdem ist q normal vom Grad 3. Analog zu Satz 4.2.2 erhalten wir ein Element $z \in \mathcal{M}(S)$, sodass $z^3 \in \mathbb{C}(x, y)$ und $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, y, z)$. Nach Satz 2.2.2 ist q über drei Punkten verzweigt und unverzweigt über ∞ . Somit gilt $z^3 = \frac{x^{\varepsilon_0}(x-1)^{\varepsilon_1}(x+1)^{\varepsilon_{-1}}}{x^{(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_{-1})}}$ mit $\varepsilon_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $1 \leq \varepsilon_i \leq 3$. Sonst ersetzen wir z . Wäre z.B. $\varepsilon_0 = 4$, so ersetzen wir z durch ux^3 . Dann ist $\varepsilon_0 = 1$. Ist $\varepsilon_0 = 2$, so ersetzen wir z durch zx^{-1} . Somit haben wir $\varepsilon_0 = 1$ erreicht. ε_1 und ε_{-1} sind durch die Monodromieaktion von c auf geschlossenen Wegen um die Singularitäten mit Umlaufzahl 3 gegeben. Dazu wählen wir eine Singularität $s \in S$ und den Weg γ , der in \mathbb{E} einmal um die Singularität herumläuft. Sei $y = \gamma(0) = \gamma(1)$ der Start- bzw. Endpunkt von γ . Weiter wählen wir einen Punkt x in der Faser $q^{-1}(y)$ und liften γ mit Startpunkt x . Der geliftete Weg endet in einem Punkt der Faser $q^{-1}(y)$. Den Startpunkt des Lifts beschriften wir mit 1 und den Endpunkt mit 2. Danach liften wir γ erneut, aber diesmal mit Startpunkt 2. Wir machen das solange, bis wir jeden Punkt von $q^{-1}(y)$ beschriftet haben. Am Ende erhalten wir eine Permutation der Menge $\{1, \dots, |q^{-1}(y)|\}$. Dies ist die Monodromie der Singularität. Der Automorphismus c überführt die gelifteten Wege um s in Wege um $c(s)$, deren Anfangs- und Endpunkte in der selben Faser liegen. Dadurch erhalten die Monodromie von $c(s)$, also erneut eine Permutation der Menge $\{1, \dots, |q^{-1}(y)|\}$. Die Zuordnung, die der Monodromie von s , die Monodromie von $c(s)$ zuordnet heißt die Monodromieaktion von c . Sei s eine Singularität mit Umlaufzahl 3. Die Monodromie von s ist der 3-Zykel $(1 \ 2 \ 3)$, weil s eine konische Singularität ist. Durch Abbilden der Wege erhalten wir die Monodromie von $c(s)$. Diese ist für jedes s durch $(1 \ 2 \ 3)$ gegeben. Wir sehen also, dass die Monodromieaktion von c in allen Verzweigungspunkten die selbe ist. Folglich ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 = 1$ und $z^3 = \frac{x(x-1)(x+1)}{x^3}$. Zum Schluss setzen wir noch $z = zx$. Damit haben wir das z aus der Behauptung gefunden, denn es gilt $z = x^3 - x = y^2$ und $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, y, z)$. \square

Folgerung 4.2.4. *Setzen wir $u = \frac{y}{z}$, so gilt $u^2 = \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^3}{z^2} = z$, $u^3 = \frac{y^3}{z^3} = \frac{y^3}{y^2} = y$ und $u^6 = (u^3)^2 = y^2 = x^3 - x$. Insbesondere gilt $\mathbb{C}(x, y, z) = \mathbb{C}(x, u)$.*

Das in der Folgerung konstruierte u ist eine mögliche Wahl für ein Element u aus Satz 4.2.2. Somit haben wir die zu S gehörige Gleichung gefunden.

Satz 4.2.5. *Zu S gehört die algebraische Kurve mit der affinen Gleichung*

$$u^6 = x(x-1)(x+1) = x^3 - x.$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(x, u)$, wobei u obige Gleichung erfüllt.

Folgerung 4.2.6. Sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Wir ersetzen das Einheitsquadrat durch das Parallelogramm mit Eckpunkten $0, 1, \tau, \tau+1 \in \mathbb{C}$. Das entspricht genau der Wirkung von $A = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -Aktion auf Translationsflächen. So wird aus E der Torus $E_\lambda := \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \tau\mathbb{Z})$, also die elliptische Kurve mit der Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$. Weiter wird S zu $S_\lambda := S_A$. S_λ ist die Kurve mit der Gleichung

$$u^6 = x(x-1)(x-\lambda).$$

4.3 Darstellungen von c

Zum Abschluss schauen wir uns noch c in der Repräsentation von S als algebraische Kurve an.

Satz 4.3.1. Fassen wir S als Nullstellenmenge $V(u^6 - (x^3 - x))$ auf, so gilt

$$c: S \rightarrow S, (x, u) \mapsto (x, \zeta_6 u).$$

Dabei ist ζ_6 eine primitive 6-te Einheitswurzel.

Beweis. c induziert trivialerweise die Identität auf $S/\langle c \rangle$. Damit gilt $c(x) = x$. Also ist $c \in \mathrm{Gal}(\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x))$. Sei $\zeta_6 = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ eine primitive 6-te Einheitswurzel. Dann ist die Abbildung $f: S \rightarrow S$, welche durch $x \mapsto x, u \mapsto \zeta_6 u$ definiert ist ein Automorphismus von Ordnung 6 von $S = V(u^6 - (x^3 - x))$, der x festhält, also auch in der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x))$. Da $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}(S)/\mathbb{C}(x)) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, also insbesondere nur ein Element der Ordnung 6 enthält folgt, dass c mit f übereinstimmt. \square

Satz 4.3.2. Fassen wir S als $V(y^2 - (x^3 - x), z^3 - y^2)$ auf, so ist c gegeben durch

$$(x, y, z) \mapsto (x, -y, \zeta_3 z).$$

Dabei ist $\zeta_3 = \zeta_6^2$ eine (primitive) 3-te Einheitswurzel.

Inbesondere ist der von c auf der elliptischen Kurve \mathbb{E} induzierte Automorphismus gegeben durch $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Beweis. Es gilt $y = u^3$ und $z = u^2$ (siehe Folgerung 4.2.4). Da gilt $c(x, u) = (x, \zeta_6 u)$ (Satz 4.3.1) folgt $c(x, y, z) = (x, -y, \zeta_6^2 z) = (x, -y, \zeta_3 z)$ mit $\zeta_3 := \zeta_6^2$. Die Abbildung $p: S \rightarrow \mathbb{E}$ ist gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Damit folgt der zweite Teil der Behauptung. \square

Literatur

- [For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen*. Heidelberger Taschenbücher ; 184. Springer, Berlin, 1977.
- [Har08] Günter Harder. *Lectures on Algebraic Geometry I : Sheaves, Cohomology of Sheaves, and Applications to Riemann Surfaces*. SpringerLinkSpringer eBook Collection. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [Har11] Günter Harder. *Lectures on Algebraic Geometry II : Basic Concepts, Coherent Cohomology, Curves and their Jacobians*. SpringerLink. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.
- [Hat10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 13. print. edition, 2010.
- [Her23] Frank Herrlich. *Vorlesungsskript Translationsflächen*, 2023.
- [HS05] Frank Herrlich and Gabriela Schmithuesen. *An extraordinary origami curve*, 2005. <https://www.math.kit.edu/iag3/~herrlich/media/wollmilchsau.pdf>.
- [Sil09] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Graduate texts in mathematics ; 106. Springer, Dordrecht, second edition edition, 2009.