

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ . Weiterhin bezeichnen wir den *Nordpol* mit  $N := (0, 0, 1)$  und den *Südpol* mit  $S := (0, 0, -1)$ . Zu diesen definieren wir die *stereographischen Projektionen*

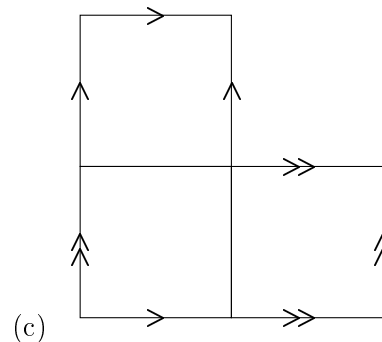
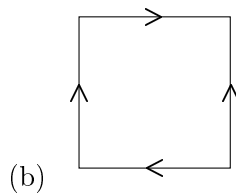
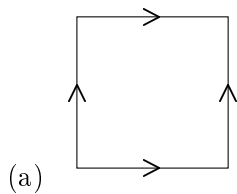
$$\phi_N: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \phi_S: S^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

durch folgende Vorschrift: Zu  $P \in S^2 \setminus N$  gibt es genau eine Gerade  $g$  durch  $P$  und  $N$ ; wir setzen  $(a, b, 0) := \{z = 0\} \cap g$  und definieren  $\phi_N(P) := (a, b)$ . Die Abbildung  $\phi_S$  sei analog definiert.

Zeigen Sie, dass, nach geeigneten Identifikationen von  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$ , die Karten  $(S^2 \setminus N, \phi_N)$  und  $(S^2 \setminus S, \phi_S)$  einen komplexen Atlas von  $S^2$  bilden.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die drei Flächen, die man durch Verkleben von Einheitsquadraten  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  erhält. Dabei werden immer nur parallele Kanten miteinander verklebt. Die Richtung der Markierungen beschreiben die Orientierung des Verklebens.



Zeigen Sie, dass die folgenden Flächen reelle Mannigfaltigkeiten sind, indem Sie einen konkreten Atlas angeben. Definieren diese Atlanten auch eine komplexe Struktur?

### Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist als eine Einladung zum Rumspielen mit flatsurf gedacht. flatsurf ist eine sage Bibliothek mit der man flache Flächen (spezielle Riemannsche Flächen; engl. flatsurfaces) modellieren und viele mathematische Probleme konkret ausrechnen kann.

Siehe hier für eine Anleitung zum Installieren von sage und hier von flatsurf.

- Erzeugen Sie eine flache Fläche, indem Sie entweder ein 'build in surface' benutzen, oder mehrere Polygone erzeugen und diese miteinander verkleben (siehe hier für die Befehle).
- Mit der Methode `plot()` (oder je nach Umgebung `plot().show()`) können Sie die flache Fläche anzeigen lassen.
- Sie können auch mit einem Polygon starten und sich die zugehörige Entfaltungsfläche (minimal cover) generieren (siehe hier unter 'minimal translation surface cover').
- Wählen Sie einen Richtungsvektor zu einem beliebigen Punkt der Fläche aus und generieren Sie die davon erzeugte Trajektorie (siehe hier). Das Argument für die 'flow' Methode bestimmt hierbei durch wie viel Kanten die Trajektorie maximal hindurch gehen darf. Mit der Methode 'is\_closed' können Sie testen ob die Trajektorie geschlossen ist.
- Besonders wichtige Trajektorien sind sogenannte Sattelverbindungen. Dies sind genau die Trajektorien, deren Start und Endpunkt Singularitäten (Ecke eines Polygons, dessen Umlaufwinkel größer  $2\pi$  ist) sind. Vieles zu Sattelverbindungen in flatsurf finden Sie hier  
Lassen Sie sich alle Sattelverbindungen mit einer maximalen Länge ausgeben. Wie viele gibt es?  
Lassen Sie sich mehrere Sattelverbindungen anzeigen und visualisieren Sie die Schnittpunkte.
- Die Richtung einer Sattelverbindung heißt Holonomievektor. Visualisieren Sie die Holonomievektoren auf dem Einheitskreis. Was beobachten Sie, wenn die maximale Länge der Sattelverbindungen immer größer wird?

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 21. Oktober**.