

SOMMERSEMESTER 2025  
**ELEMENTARE GEOMETRIE**

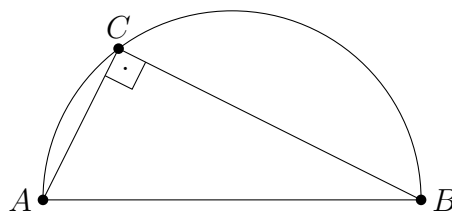
KATHARINA HÜBNER

INHALTSVERZEICHNIS

1. Was ist ebene Geometrie?	1
1.1. Geometrie in der Schule	1
1.2. Die Ursprünge der Axiomatik	3
2. Mengenlehre	4
2.1. Die Entwicklung der Mengenlehre	4
2.2. Grundlegende Konstruktionen mit Mengen	5
2.3. Weitere Relationen	9
2.4. Äquivalenzrelationen	9
3. Inzidenzebenen	10
3.1. Die affine Ebene über $\mathbb{R}$	13
4. Affine Ebenen	17
4.1. Die reelle affine Ebene	18
5. Projektive Ebenen	22
5.1. Die Axiome der projektiven Ebene	23
5.2. Die reelle projektive Ebene	24
6. Morphismen von Inzidenzebenen	28
7. Affine versus projektive Ebenen	34
7.1. Axiomatisch	34
7.2. Reelle affine und projektive Ebenen	36
Literatur	40

1. WAS IST EBENE GEOMETRIE?

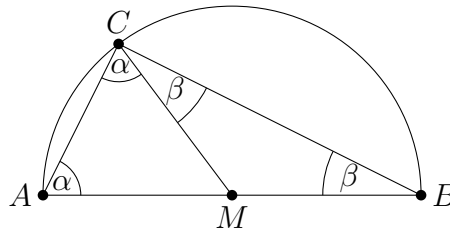
1.1. **Geometrie in der Schule.** In der Schule haben wir uns mit Geometrie in der euklidischen Ebene beschäftigt, also in  $\mathbb{R}^2$ .



**Beispiel 1.1** (Satz des Thales). Dieses Bild haben wir vor Augen, aber wir können uns nicht darauf verlassen, dass alle Bilder gleich aussehen. Daher beschreiben wir die Aussage in Worten.

**Satz 1.2** (Satz des Thales). Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte in der Ebene. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$  und  $k$  der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r = \overline{AM}$ . Sei  $C$  ein von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt auf dem Kreis  $k$ . Dann hat das Dreieck  $ABC$  bei  $C$  den Winkel  $90^\circ$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit der Skizze.



Die Winkelsumme im Dreieck  $ABC$  ist  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , also  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

In Worten: Die Strecke  $MC$  teilt den Winkel  $ACB$  in die zwei Winkel  $\alpha := \angle ACM$  und  $\beta = \angle MCB$ . Da die Strecken  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  jeweils den Mittelpunkt des Kreises  $k$  mit der Kreislinie verbinden, haben sie alle Länge  $r$ . Daher sind die Dreiecke  $ACM$  und  $BCM$  gleichschenkelig: Die Winkel  $ACM$  und  $MAC$  sind gleich  $\alpha$  und die Winkel  $MCB$  und  $CBM$  sind gleich  $\beta$ . Weil die Winkelsumme im Dreieck  $ABC$  gleich  $180^\circ$  ist, gilt

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Dividieren wir beide Seiten durch 2, so erhalten wir

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

welches die Aussage ist, die wir beweisen wollten. □

Was haben wir hier benutzt?

- Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$
- Gleichschenklige Dreiecke haben zwei gleiche Winkel
- Die Summe zweier Nebenwinkel ist  $180^\circ$

Es gibt sogar noch grundlegendere Fragen:

- Was ist die Strecke zwischen zwei Punkten und was ist ihr Mittelpunkt?
- Wie gibt man Winkeln eine Orientierung? Unterscheide  $\sphericalangle$   $\curvearrowright$
- Liegen die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  wie auf einer Geraden? Das heißt, definieren sie immer ein Dreieck?
- Wie misst man Abstände? Wie ist ein Kreis definiert?

Um den Satz des Thales zu beweisen, benutzen wir folglich eine ganze Reihe an Resultaten und Konzepten. Nun könnten wir versuchen, auch für diese einen Beweis, beziehungsweise eine Definition oder Konstruktion, zu finden. Führen wir das fort, sollten wir an einem Punkt ankommen, an dem wir die Aussagen nicht mehr aus grundlegenden Zusammenhängen herleiten können. Gewisse Konzepte und Eigenschaften müssen wir als gegeben voraussetzen.

**1.2. Die Ursprünge der Axiomatik.** Der erste Versuch ein Axiomensystem zu finden, aus dem man alle Resultate der ebenen Geometrie herleiten kann, stammt von Euklid aus dem Jahre 325 vor Christus. Sein Werk mit dem Titel „Elemente“ besteht aus 13 Büchern und umfasst ebene Geometrie, aber auch Zahlentheorie. Es beginnt mit einem Satz von Definitionen, Axiomen und Postulaten. Die *Definitionen* legen die grundlegenden Objekte fest. Die berühmteste ist die Definition eines Punktes:

*Ein punct ist ein untheilbares düpflein.* (Euklid, in der übersetzten Version von Iann Dou aus dem Jahr 1618)

Eine zweite wichtige Definition ist die einer Strecke zwischen zwei Punkten. Damit sind Strecken und Punkte aber nicht nicht zu genüge beschrieben. Die Objekte (also z.B. Punkte und Strecken) unterliegen sogenannten *Postulaten*. Diese bilden die Spielregeln, die beschreiben, in welchen Verhältnis Punkte und Strecken zueinander stehen, und welche Operatoren erlaubt sind. Beispielsweise legen sie fest, wie sich wie sich zwei Strecken schneiden können. Ein Beispiel für ein Postulat ist folgendes.

*Auff einem ebenen platz mag von einem punct zu den andern eine rechte oder gerade linea ghezogen werden.*

Die *Axiome* sind bei Euklid Gesetze der Logik, die zugrunde gelegt werden. Aus den Definitionen, Postulaten und Axiomen werden dann die Gesetzmäßigkeiten der ebenen Geometrie hergeleitet. Diese nennt Euklid „Propositionen“. Das deckt sich mit dem Begriff der Proposition aus der modernen Mathematik. Ein Beispiel wäre der in Abschnitt 1.1 behandelte Satz des Thales. Man kann ihn nur unter Verwendung der Definitionen und Postulate mithilfe der Axiome herleiten.

Über 2000 Jahre waren Euklids „Elemente“ das Standardwerk zur ebenen Geometrie. Aus heutiger Sicht weist die Logik jedoch einige Lücken auf, und viele Konzepte wie „Längen“ und „Breiten“ werden implizit als bekannt vorausgesetzt. Im 19. Jahrhundert wurden die Grundlagen der Mengenlehre entwickelt. Auf deren Basis war es möglich, ein präziseres und moderneres Axiomensystem zu formulieren. Der logische Aufbau der Geometrie, wie sie in der Vorlesung behandelt werden, folgt dementsprechend im Wesentlichen dem Buch „Grundlagen der Geometrie“ von David Hilbert aus dem Jahr 1899 [Hil99], mit einigen kleinen Verbesserungen. Hier werden die Mengenlehre und Logik als gegeben vorausgesetzt. Punkte und Geraden sind die grundlegenden Objekte, die durch *Axiome* in Beziehung zueinander gesetzt werden. Zum Beispiel wird gefordert, dass zwei Punkte immer durch eine Gerade verbunden werden können. Tatsächlich findet Hilbert ein Axiomensystem, das die euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$  vollständig beschreibt. Das bedeutet, dass jedes Modell, das seinen Axiomen genügt, schon isomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist. Diese Axiome kann man zusammenfassen als Axiome der

- Verknüpfung,
- Anordnung,
- Parallelen (Euklidisches Axiom),
- Kongruenz,
- Stetigkeit (Archimedisches Axiom).

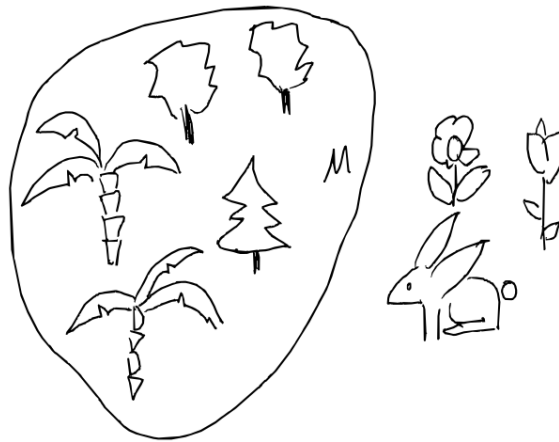
Lässt man eines oder mehrere dieser Axiome weg, gibt es auch alternative geometrische Anordnungen, wie zum Beispiel die hyperbolische Ebene, die die verbleibenden Axiome erfüllen.

## 2. MENGENLEHRE

**2.1. Die Entwicklung der Mengenlehre.** Die Mengenlehre wurde Ende des 19. Jahrhunderts von Georg Cantor begründet. Sie bildet die Grundlage der Sprache der modernen Mathematik. Wie der Name schon sagt, geht es darum, zu klären, was eine Menge ist und welche Operationen man mit Mengen durchführen kann. 1895 formulierte Cantor folgende Definition einer Menge:

*Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung, oder unseres Denkens (welche die Elemente von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.*

**Beispiel 2.1.** Wir betrachten die Menge aller Bäume im Palmengarten.



Die Blumen und der Hase sind nicht in dieser Menge enthalten.

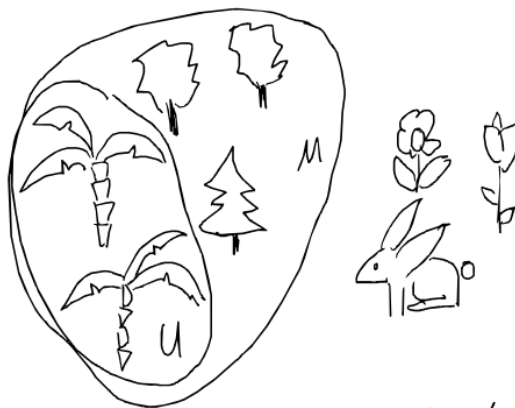
Mengen haben Elemente. Für eine Menge  $M$  schreiben wir  $m \in M$ , falls  $m$  in  $M$  enthalten ist.

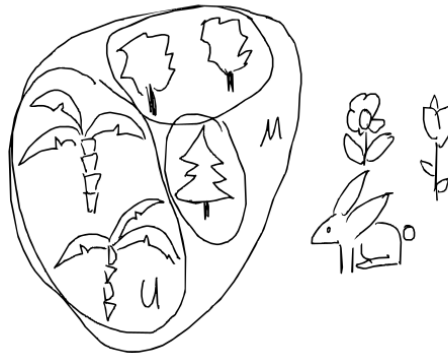
**Definition 2.2.** Eine *Teilmenge* einer Menge  $M$  ist eine Menge  $U$ , für die gilt

$$m \in U \Rightarrow m \in M.$$

In diesem Fall schreiben wir  $U \subseteq M$ .

**Beispiel 2.3.** In unserem vorherigen Beispiel 2.1 wäre die Menge  $U$  aller Palmen im Palmengarten eine Teilmenge der Menge  $M$  aller Bäume.





Mengen können selbst wieder Elemente einer Menge sein. Im obigen Beispiel können wir etwa folgende Menge bilden:

$$B := \{\{\text{Bäume}\}, \{\text{Laubbäume}\}, \{\text{Nadelbäume}\}\}$$

Diese Menge hat drei Elemente, und jedes davon ist selbst eine Menge.

Weitere Beispiele für Mengen sind die Mengen der

- natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ ,
- ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ ,
- rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ ,
- reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ ,
- sowie die leere Menge  $\emptyset$ .

So naiv wie wir darf man eigentlich nicht an das Thema der Mengenlehre rangehen, denn dann verstrickt man sich leicht in Widersprüche. Ein berühmtes Beispiel ist das Folgende.

**Beispiel 2.4.** Wir definieren die Menge

$$X = \{\text{Mengen } M \mid M \notin M\}.$$

Jetzt können wir uns fragen, ob  $X$  in sich selbst enthalten ist, also  $X \in X$  gilt. Wäre das der Fall, so gälte es nach der Definition von  $X$ , dass  $X \notin X$ , ein Widerspruch.

Ist aber  $X \notin X$ , so folgt wiederum aus der Definition der Menge  $X$ , dass  $X \in X$ , ein erneuter Widerspruch.

Widersprüche wie in diesem Beispiel stürzten die Mathematiker für eine Weile in eine Grundlagenkrise und am Anfang des 20. Jahrhunderts versuchten Viele, die Mengenlehre auf eine solide Basis zu stellen. Am weitesten verbreitet ist das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel. Meistens umfasst es auch das Auswahlaxiom, das grob gesprochen besagt, dass es möglich ist, für eine gegebene Menge von nichtleeren Mengen  $\{A_i\}_{i \in I}$  aus jeder Menge  $A_i$  ein Element  $a_i$  auszuwählen, und daraus eine neue Menge  $\{a_i\}_{i \in I}$  zu bilden.

Wir wollen dieses Fass nicht aufmachen, und tun so, als ob wir wissen, was eine Menge ist.

## 2.2. Grundlegende Konstruktionen mit Mengen.

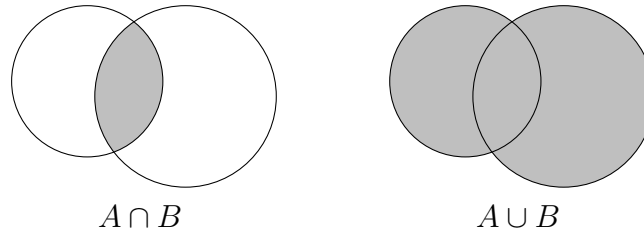
**Definition 2.5.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen.

- (i) Der *Schnitt* oder *Durchschnitt* von  $A$  und  $B$  ist definiert als

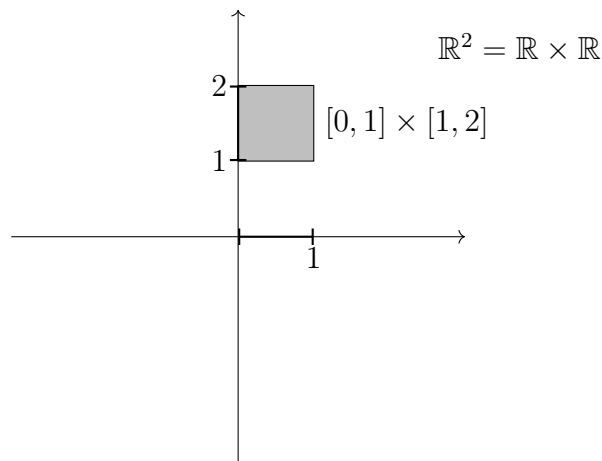
$$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}.$$

(ii) Die *Vereinigung* von  $A$  und  $B$  ist definiert als

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}.$$



Als nächstes wollen wir das kartesische Produkt  $A \times B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  definieren. Zum Beispiel sollte gelten  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , und für  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  und  $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$  sollte sich folgendes Bild ergeben.



$$[0, 1] \times [1, 2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y \in [1, 2]\}$$

Im Allgemeinen müssen wir mengentheoretisch erklären, was ein geordnetes Paar  $(x, y)$  ist. Ein geordnetes Paar  $(x, y)$  sollte so etwas ähnliches sein wie  $\{x, y\}$ , die Menge, die aus den beiden Elementen  $x$  und  $y$  besteht, mit dem Unterschied, dass zusätzlich noch eine Reihenfolge festgelegt wird:  $x$  ist die *erste* Komponente, und  $y$  die *zweite*. Formal kann man das folgendermaßen modellieren:

**Definition 2.6.** Seien  $A, B$  zwei Mengen, und  $a \in A, b \in B$ . Das *geordnete Paar*  $(x, y)$  ist definiert als

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Hiermit können wir das Produkt definieren.

**Definition 2.7.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Das *kartesische Produkt*  $A \times B$  ist definiert als die Menge aller geordneten Paare:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Als nächstes wollen wir Abbildungen definieren. Intuitiv würde man eine Abbildung  $f$  von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  definieren als eine Vorschrift, die einem Element

$a \in A$  ein Element  $b \in B$  zuordnet. Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  können wir ihren Graphen zuordnen. Das ist die Menge

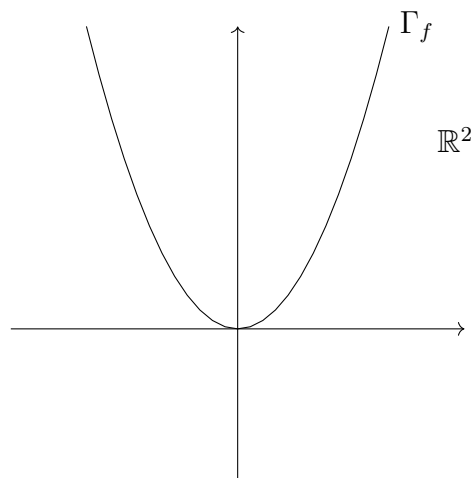
$$\Gamma_f := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B.$$

Für die Abbildung

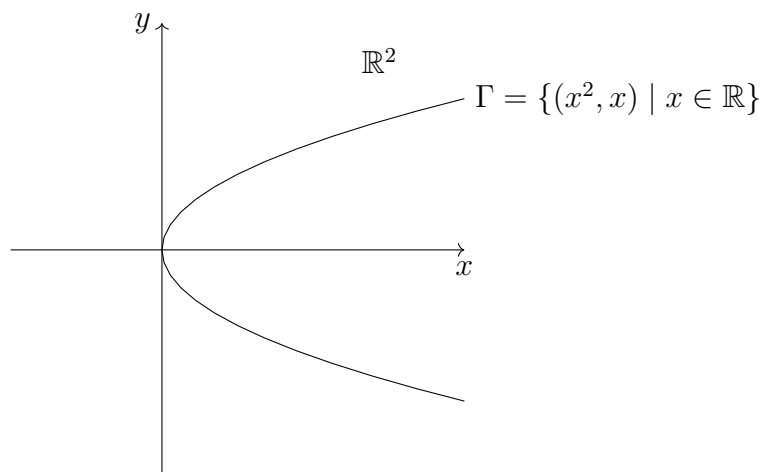
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist der Graph die Teilmenge

$$\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 :$$



Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist durch ihren Graphen  $\Gamma_f \subseteq A \times B$  eindeutig festgelegt. Allerdings ist nicht jede Teilmenge von  $A \times B$  der Graph einer Funktion. Zum Beispiel ist folgende Teilmenge  $\Gamma$  von  $\mathbb{R}^2$  nicht der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :



Das Problem besteht darin, dass es für  $x < 0$  kein  $y \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $(x, y) \in \Gamma$ . Außerdem gibt es für  $x > 0$  gleich zwei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $(x, y) \in \Gamma$ . Das heißt, der Funktionswert von  $x$  wäre nicht eindeutig festgelegt. Die Menge  $[0, 1] \times [1, 2] \in \mathbb{R}^2$ , die wir zuvor betrachtet haben, ist noch weiter davon entfernt, der Graph einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu sein.

Nun wollen wir formal in der Sprache der Mengenlehre definieren, was eine Abbildung ist. Dafür brauchen wir zunächst den Begriff der Relation.

**Definition 2.8.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine *Relation* zwischen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A \times B.$$

In der Mengenlehre wird eine Abbildung über ihren Graphen definiert, sie ist also eine Relation mit bestimmten Eigenschaften.

**Definition 2.9.** Eine *Abbildung* ist ein Tripel  $f = (A, B, \Gamma_f)$ , wobei  $A$  und  $B$  Mengen sind, und

$$\Gamma_f \subseteq A \times B$$

eine Relation, so dass für jedes  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  existiert, mit  $(a, b) \in \Gamma_f$ .

Auch wenn eine Funktion formal gesehen eine Relation  $\Gamma_f \subseteq A \times B$  ist, benutzen wir die Schreibweise

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

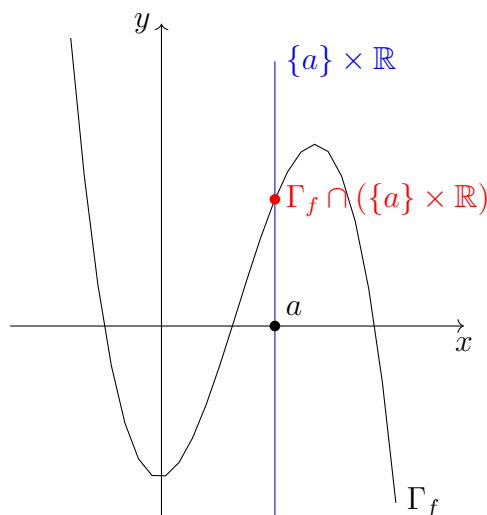
Hierbei ist  $f(a)$  das eindeutige Element von  $B$ , für das  $(a, f(a)) \in \Gamma_f$ .

Man kann die Bedingung an die Relation  $\Gamma_f \subseteq A \times B$  (dass es für jedes  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  gibt mit  $(a, b) \in \Gamma_f$ ) auch folgendermaßen umformen: Für jedes  $a \in A$  ist der Schnitt

$$\Gamma_f \cap (\{a\} \times B)$$

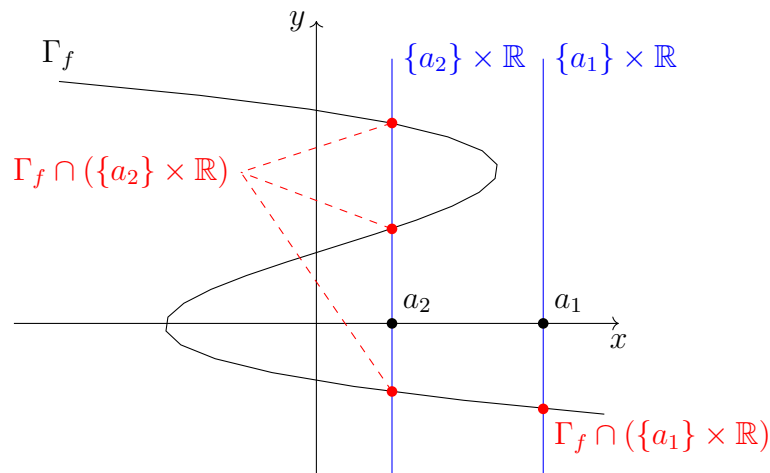
eine Teilmenge von  $A \times B$  der Kardinalität 1. Das heißt, die Menge enthält genau ein Element, eben das Element  $b$ , so dass  $(a, b) \in \Gamma_f$ .

Für  $A = B = \mathbb{R}$  kann man die Bedingung folgendermaßen visualisieren:



In obigem Bild ist die Bedingung erfüllt (soweit man das anhand der Zeichnung beurteilen kann). Die Menge  $\Gamma_f \subseteq A \times B$  definiert tatsächlich eine Funktion.

In diesem Bild ist die Bedingung für manche Punkte erfüllt, zum Beispiel für  $a_1$ , und für manche Punkte nicht, zum Beispiel für  $a_2$ . Um den Graph einer Funktion zu sein, müsste  $\Gamma_f$  die Bedingung für alle Punkte erfüllen.



**2.3. Weitere Relationen.** Wir wollen uns nun noch ein paar weitere Beispiele für Relationen anschauen.

**Beispiel 2.10.** Eine wohlvertraute Relation ist  $\leq$  auf den reellen Zahlen. Das zugehörige Tripel ist  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, M)$  wobei

$$M := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}.$$

Ähnliches gilt für  $>$ ,  $\geq$  und  $<$ .

**Beispiel 2.11.** Auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  gibt es die Teilbarkeitsrelation

$$T = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ teilt } b\}.$$

Falls  $(a, b) \in T$ , benutzen wir auch die Schreibweise  $a \mid b$ , und für  $(a, b) \notin T$  schreiben wir auch  $a \nmid b$ .

Zum Abschluss betrachten wir noch eine Relation  $(A, B, R)$ , bei der die Mengen  $A$  und  $B$  verschieden sind.

**Beispiel 2.12.** Sei  $A = \mathbb{R}^2$  und  $B$  die Menge aller Geraden  $g \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dann wird die Relation  $(A, B, R)$  mit

$$R = \{(x, g) \mid x \text{ liegt auf } g\}$$

im weiteren Verlauf der Vorlesung eine Rolle spielen.

**2.4. Äquivalenzrelationen.** Eine besondere Klasse von Relationen bilden die Äquivalenzrelationen. Sie sind folgendermaßen definiert.

**Definition 2.13.** Eine Relation der Form  $(A, A, R)$  ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (i) *Reflexivität:* Für jedes  $a \in A$  ist  $(a, a) \in R$ ;
- (ii) *Symmetrie:* Gilt  $(a, b) \in R$ , so folgt  $(b, a) \in R$ ;
- (iii) *Transitivität:* Aus  $(a, b) \in R$  und  $(b, c) \in R$  folgt  $(a, c) \in R$ .

Oft benutzen wir folgende Notation für eine Äquivalenzrelation  $(A, A, R)$ . Da die beiden Mengen, zwischen denen die Relation besteht, gleich sind, schreiben wir oft  $(A, R)$  für die Äquivalenzrelation, statt  $(A, A, R)$ . Für Elemente  $a, b \in A$  schreiben wir  $a \sim_R b$ , falls  $(a, b) \in R$ , und  $a \not\sim_R b$ , falls  $(a, b) \notin R$ .

**Beispiel 2.14.** Wir betrachten die Menge  $A$  aller Dreiecke in  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist „Ähnlichkeit“, also die Relation  $(A, R)$  mit

$$R = \{(D_1, D_2) \in A^2 \mid D_1 \text{ und } D_2 \text{ haben die gleichen Innenwinkel}\},$$

eine Äquivalenzrelation:

- (i) Jedes Dreieck ist ähnlich zu sich selbst.
- (ii) Ist  $D_1$  ähnlich zu  $D_2$ , dann ist auch  $D_2$  ähnlich zu  $D_1$ .
- (iii) Ist  $D_1$  ähnlich zu  $D_2$  und  $D_2$  ähnlich zu  $D_3$ , dann ist  $D_1$  ähnlich zu  $D_3$ .

**Definition 2.15.** Sei  $(A, R)$  eine Äquivalenzrelation und  $a \in A$  ein Element. Dann heißt die Menge

$$[a] := \{b \in A \mid a \sim_R b\}$$

die *Äquivalenzklasse* von  $a$ . Die Menge der Äquivalenzklassen

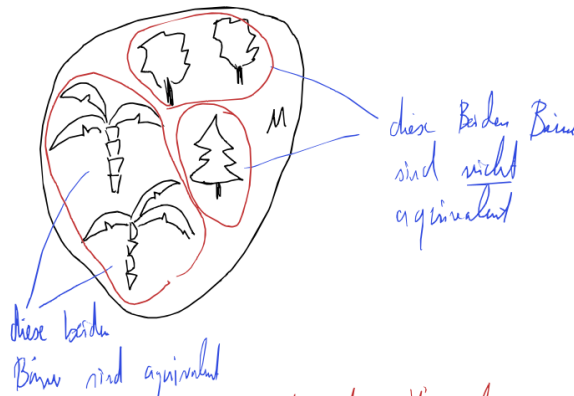
$$\{[a] \mid a \in A\}$$

nennen wir den *Quotienten* von  $A$  unter der Äquivalenzrelation und schreiben

$$A/R \text{ oder } A/\sim_R.$$

**Beispiel 2.16.** Gehen wir zurück zu unserem Beispiel mit den Bäumen im Palmengarten. Wir sagen, dass zwei Bäume äquivalent sind, wenn sie von der gleichen Sorte sind. Hier vereinfachen wir die Natur ein bisschen und tun so, also ob wir alle Bäume in Nadelbäume, Palmen und Laubbäume einteilen könnten, also dass es diese drei Sorten gibt. Der zugehörige Quotient besteht aus drei Äquivalenzklassen:

$$M/\sim = \{\{\text{Nadelbäume}\}, \{\text{Laubbäume}\}, \{\text{Palmen}\}\}.$$



In rot sieht man die drei Äquivalenzklassen.

### 3. INZIDENZEBENEN

Grob gesprochen sind Inzidenzebenen geometrische Anordnungen von Punkten und Geraden, die ein Minimum an Axiomen erfüllen. Beispiele dafür gibt es viele. Die euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist eines davon, aber wir werden sehen, dass es noch viele ganz anders geartete Beispiele gibt. Wir betrachten zwei Mengen  $\underline{P}$  und  $\underline{G}$ . Hierbei steht  $P$  für Punkte und  $G$  für Geraden. Formal sind es aber einfach zwei Mengen. Wir nehmen außerdem an, dass zwischen  $\underline{P}$  und  $\underline{G}$  eine Relation  $R \subset \underline{P} \times \underline{G}$  gegeben ist. Diese soll beschreiben, welche Punkte auf welcher Geraden liegen. Wir benutzen dementsprechend folgende Sprechweise:

Ein Punkt  $A \in \underline{P}$  liegt auf der Geraden  $g \in \underline{G}$ , falls  $(A, g) \in R$ .

Außerdem benutzen wir folgende Begriffe:

**Definition 3.1.** Gegeben sei eine Relation  $(\underline{P}, \underline{G}, R)$  wie vorher.

- Ein Punkt  $A \in \underline{P}$  heißt *Schnittpunkt* zweier Geraden  $g, h \in \underline{G}$ , falls  $A$  auf  $g$  und auf  $h$  liegt (also  $(A, g) \in R$  und  $(A, h) \in R$ ).
- Eine Teilmenge  $M \subset \underline{P}$  mit mindestens drei Elementen heißt *kollinear*, falls es eine Gerade  $g \in \underline{G}$  gibt, mit  $(m, g) \in R$  für alle  $m \in M$  (also alle Punkte in  $M$  liegen auf  $g$ ).
- Drei Punkte  $A, B, C \in \underline{P}$  sind in *allgemeiner Lage*, falls  $\{A, B, C\}$  nicht kollinear ist.
- Zwei Geraden  $g, h \in \underline{G}$  heißen *parallel* (geschrieben  $g \parallel h$ ) falls entweder  $g = h$  oder  $g$  und  $h$  keine Schnittpunkte haben.

Wir benutzen auch die Notation  $g \cap h$  für die Menge der Schnittpunkte zweier Geraden  $g, h \in \underline{G}$ , also

$$g \cap h := \{A \in \underline{P} \mid \underline{P} \text{ liegt auf } g \text{ und auf } h\}.$$

Bis jetzt haben wir noch keine Bedingungen an die Relation  $R \subset \underline{P} \times \underline{G}$  gestellt. Sie könnte irgendetwas wildes sein, das unserer Intuition völlig widerspricht. Damit wir tatsächlich Geometrie machen können, brauchen wir zunächst ein paar grundlegende Forderungen.

**Definition 3.2.** Eine Relation  $(\underline{P}, \underline{G}, R)$  heißt *Inzidenzebene*, falls folgende Inzidenzaxiome erfüllt sind:

- ( $I_1$ ) Für zwei verschiedene Punkte  $A \neq B$  in  $\underline{P}$  gibt es genau eine Gerade  $g \in \underline{G}$ , auf der  $A$  und  $B$  liegen (also  $(A, g) \in R$  und  $(B, g) \in R$ ). Wir nennen diese *Verbindungsgerade*  $\overleftrightarrow{AB}$  von  $A$  und  $B$ .
- ( $I_2$ ) Auf jeder Geraden  $g \in \underline{G}$  liegen mindestens zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \underline{P}$ .
- ( $I_3$ ) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Das Axiom ( $I_1$ ) ist eine präzisere Formulierung von Euklids erstem Axiom. Die anderen beiden stellen sicher, dass es genügend Punkte gibt.

**Beispiel 3.3.** Das Minimalbeispiel einer Inzidenzebene ist das Folgende:

$$\underline{P} = \{A, B, C\}$$

bestehend aus Punkten  $A, B, C$  und

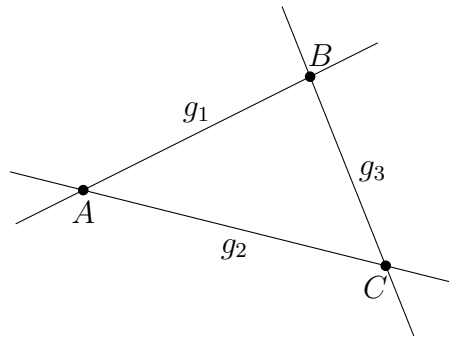
$$\underline{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$$

aus drei Geraden, und

$$R = \{(A, g_1), (A, g_2), (B, g_1), (B, g_3), (C, g_2), (C, g_3)\}.$$

Als nächstes wollen wir sehen, wie man aus den Axiomen  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  einer Inzidenzebene formal erste Eigenschaften schließen kann. Diese entsprechen genau unserer Intuition, brauchen jedoch streng genommen einen Beweis.

**Proposition 3.4.** Sei  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  eine Inzidenzebene, und  $g, h \in \underline{G}$  zwei nicht parallele Geraden. Dann haben  $g$  und  $h$  einen eindeutig bestimmten gemeinsamen Schnittpunkt.



*Beweis.* Nach Definition der Eigenschaft „parallel“ ist  $g \neq h$  und es gibt einen Schnittpunkt  $P$  von  $g$  und  $h$ . Wir müssen zeigen, dass  $P$  der einzige Schnittpunkt ist.

Angenommen es gibt einen weiteren Schnittpunkt  $Q$ . Nach Axiom  $I_1$  gibt es eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{PQ}$ . Aber da  $P$  und  $Q$  beide auf  $g$  und  $h$  liegen, sind  $g$  und  $h$  beide Verbindungsgeraden von  $P$  und  $Q$ . Daraus folgt

$$g = \overleftrightarrow{PQ} = h.$$

Das führt zu einem Widerspruch da wir schon festgestellt haben, dass  $g \neq h$ . Folglich war unsere Annahme, dass es einen zweiten Schnittpunkt  $Q$  gibt, falsch, und  $P$  ist der einzige Schnittpunkt.  $\square$

**Definition 3.5.** Seien  $g$  und  $h$  zwei nicht parallele Geraden in einer Inzidenzebene  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$ . Dann nennen wir den eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $g \wedge h$ .

**Proposition 3.6.** Seien  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  eine Inzidenzebene und  $A, B, C \in \underline{P}$  drei Punkte mit  $A \neq B$  und  $B \neq C$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i)  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$
- (ii)  $B$  liegt auf  $\overleftrightarrow{AC}$

Bevor wir den Beweis beginnen, machen wir uns klar, dass wir die Voraussetzungen  $A \neq B$  und  $A \neq C$  brauchen, damit die Verbindungsgeraden  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{BC}$  definiert sind. Die Aussagen (i) und (ii) ergeben folglich Sinn.

*Beweis.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“. Angenommen es gilt  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ . Per Definition liegt  $B$  auf der Verbindungsgerade  $\overleftrightarrow{AB}$ . Da  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$  gilt, folgt, dass  $B$  auf  $\overleftrightarrow{AC}$  liegt.  
 „(ii)  $\Rightarrow$  (i)“. Wir nehmen an, dass  $B$  auf  $\overleftrightarrow{AC}$  liegt. Außerdem liegt auf  $\overleftrightarrow{AC}$  per Definition der Punkt  $A$  und,  $A \neq B$ . Daraus folgt, dass  $\overleftrightarrow{AC}$  die eindeutige Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$  ist (Axiom  $I_1$ ). Mit anderen Worten bedeutet das

$$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}.$$

$\square$

Wenn wir nun den Beweis aus Proposition 3.6 anschauen, fällt uns auf, dass wir von den Axiomen der Inzidenzebene lediglich das erste, also  $I_1$ , benutzt haben. Die nächste Proposition stützt sich auch auf  $I_3$ .

**Proposition 3.7.** Sei  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  eine Inzidenzebene.

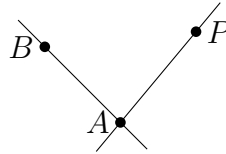
- (i) Für jede Gerade  $g \in \underline{G}$  gibt es einen Punkt  $P \in \underline{P}$ , der nicht auf  $g$  liegt.
- (ii) Für jeden Punkt  $P \in \underline{P}$  gibt es eine Gerade  $g \in \underline{G}$ , die nicht durch  $P$  geht.

*Beweis.* (i). Sei  $g$  eine Gerade. Nach Axiom  $I_3$  gibt es drei Punkte in allgemeiner Lage. Per Definition von „allgemeiner Lage“ können diese Punkte nicht alle auf  $g$  liegen. Daher gibt es einen Punkt, der nicht auf  $g$  liegt.

(ii) Sei  $P \in \underline{P}$  ein Punkt. Nach Axiom  $I_3$  gibt es drei Punkte in allgemeiner Lage. Insbesondere gibt es zusätzlich zu  $P$  mindestens einen Punkt  $A \neq P$ . Nach (i) gibt es einen Punkt  $B \in \underline{P}$ , der nicht auf  $\overleftrightarrow{AP}$  liegt. Nach Proposition 3.6 ist das äquivalent dazu, dass

$$\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AP}.$$

Wendet man noch einmal Proposition 3.6 an, aber nun mit vertauschten Rollen von  $B$  und  $P$ , erhält man, dass  $P$  nicht auf  $\overleftrightarrow{AB}$  liegt.



□

**3.1. Die affine Ebene über  $\mathbb{R}$ .** Wir wollen sehen, dass  $\mathbb{R}^2$  mit der richtigen Wahl von Geraden eine Inzidenzebene ist. Hierbei müssen wir zunächst klären, was die Menge der Geraden sein soll.

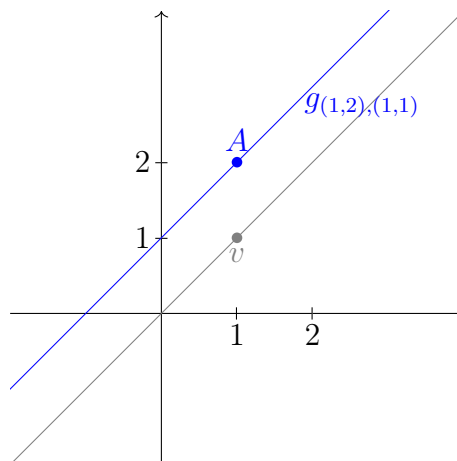
**Definition 3.8.** Eine *Gerade* in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Teilmenge der Form

$$g_{A,v} := A + \mathbb{R}v = \{A + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

für einen Punkt  $A \in \mathbb{R}^2$  und  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Das Element  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nennen wir auch *Richtungsvektor*.

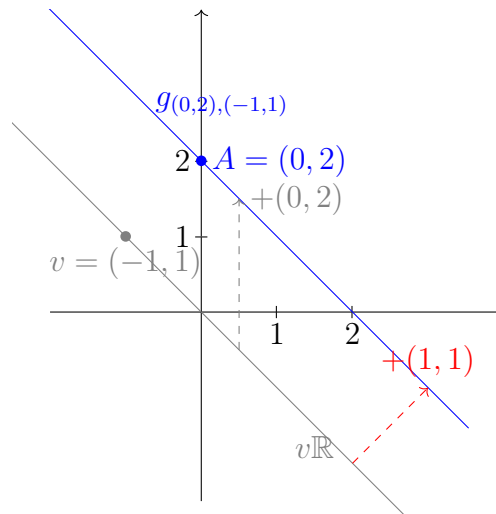
**Beispiel 3.9.** Für  $A = (1, 2)$  und  $v = (1, 1)$  erhalten wir die Gerade

$$g_{(1,2),(1,1)} = \{(1 + \lambda, 2 + \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



Für  $A = (0, 2)$  und  $v = (-1, 1)$  erhalten wir

$$g_{(0,2),(-1,1)} = \{(-\lambda, 2 + \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$



Betrachten wir nun  $A = (1, 1)$  und  $v = (2, -2)$ , erhalten wir scheinbar die gleiche Gerade:

$$g_{(1,1),(2,-2)} = \{(1 + 2\mu, 1 - 2\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

Wir behaupten, dass tatsächlich gilt

$$g_{(1,1),(2,-2)} = g_{(0,2),(-1,1)}.$$

Um zu zeigen, dass  $g_{(1,1),(2,-2)} \subseteq g_{(0,2),(-1,1)}$ , nehmen wir einen beliebigen Punkt  $P \in g_{(1,1),(2,-2)}$ , und versuchen zu zeigen, dass er auch in  $g_{(0,2),(-1,1)}$  enthalten ist.  $P$  ist von der Form  $P = (1 + 2\mu, 1 - 2\mu)$  für ein  $\mu \in \mathbb{R}$ . Wir suchen nun ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} 1 + 2\mu &= \lambda \\ 1 - 2\mu &= 2 + \lambda. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung sehen wir, dass  $\lambda = -1 - 2\mu$  gelten muss. Für diesen Wert von  $\lambda$  ist auch die zweite Gleichung erfüllt. Somit ist

$$P = (1 + 2\mu, 1 - 2\mu) = (-\lambda, 2 + \lambda) \in g_{(0,2),(-1,1)}.$$

Wir wissen nun, dass  $g_{(1,1),(2,-2)} \subseteq g_{(0,2),(-1,1)}$ . Da es sich um Geraden handelt, könnte man versucht sein zu sagen, wenn die eine in der anderen enthalten ist, dann sind sie gleich. Aber das wissen wir noch nicht. Also müssen wir auch die andere Inklusion  $g_{(0,2),(-1,1)} \subseteq g_{(1,1),(2,-2)}$  zeigen. Das Argument geht genauso wie zuvor und ist eine Übungsaufgabe.

Wie wir in Beispiel 3.9 gesehen haben, ist die Darstellung einer Gerade in der Form  $g_{A,v} = A + \mathbb{R}v$  nicht eindeutig. Damit wollen wir uns nun systematischer beschäftigen.

**Proposition 3.10.** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^2$ , und  $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $g_{A,v} = g_{B,w}$
- (ii)  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$  und  $B \in g_{A,v}$

*Beweis.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“. Nehmen wir an, es gilt  $g_{A,v} = g_{B,w}$ . Dann ist  $B \in g_{B,w} = g_{A,v}$ . Jetzt wollen wir noch zeigen, dass  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ . Dafür benutzen wir zunächst, dass  $B \in g_{A,v}$  ist es also  $\lambda_B \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$B = A + \lambda_B v.$$

Ein Element von  $\mathbb{R}w$  ist von der Form  $\mu w$  für  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$(1) \quad B + \mu w = A + \lambda_B v + \mu w.$$

Andererseits gilt  $B + \mu w \in g_{B,w} = g_{A,v}$ . Daher gibt es  $\lambda \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$(2) \quad B + \mu w = A + \lambda v.$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) erhalten wir

$$A + \lambda_B v + \mu w = A + \lambda v.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten  $A + \lambda_B v$  ab, so erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\mu w = (\lambda - \lambda_B)v \in \mathbb{R}v.$$

Somit haben wir gezeigt, dass  $\mathbb{R}w \subseteq \mathbb{R}v$ . Da die Voraussetzung ( $g_{A,v} = g_{B,w}$ ) symmetrisch in  $(A, v)$  und  $(B, w)$  ist, können wir das Argument auch mit vertauschten Rollen von  $(A, v)$  und  $(B, w)$  führen, und erhalten  $\mathbb{R}v \subseteq \mathbb{R}w$ . Insgesamt folgt daraus  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ .

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“. Wir nehmen an  $B \in g_{A,v}$ , und  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ . Da  $B \in g_{A,v}$  ist, gibt es  $\lambda_B \in \mathbb{R}$  mit

$$(3) \quad B = A + \lambda_B v.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass  $g_{B,w} \subseteq g_{A,v}$ . Ein Element von  $g_{B,w}$  ist von der Form  $B + \mu w$  für  $\mu \in \mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$  ist, gibt es  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$(4) \quad \lambda v = \mu w.$$

Mithilfe der Gleichungen (3) und (4) können wir den Punkt  $B + \mu w$  umschreiben:

$$B + \mu w = A + \lambda_B v + \lambda v = A + (\lambda_B + \lambda)v \in g_{A,v}.$$

Für die umgekehrte Inklusion  $g_{A,v} \subseteq g_{B,w}$  betrachten wir ein Element  $A + \lambda v \in g_{A,v}$ . Gleichung (3) können wir umformen in

$$A = B - \lambda_B v.$$

Damit erhalten wir

$$A + \lambda v = B + (\lambda - \lambda_B)v.$$

Da  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ , gibt es  $\mu \in \mathbb{R}$ , so dass

$$(\lambda - \lambda_B)v = \mu w.$$

Setzen wir das ein, erhalten wir

$$A + \lambda v = B + (\lambda - \lambda_B)v = B + \mu w.$$

Somit gilt auch  $g_{A,v} \subseteq g_{B,w}$ . □

Wir definieren nun

$$\underline{G}_{\mathbb{R}} := \{g_{A,v} \mid A \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$$

und die Relation

$$R_{\mathbb{R}} := \{(P, g) \in \mathbb{R}^2 \times \underline{G}_{\mathbb{R}} \mid P \in g\}.$$

**Satz 3.11.** *Das Tripel  $(\mathbb{R}^2, \underline{G}_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}})$  ist eine Inzidenzebene.*

*Beweis.* Wir müssen die Eigenschaften  $(I_1)$ ,  $(I_2)$  und  $(I_3)$  aus Definition 3.2 überprüfen.

- (I<sub>1</sub>) Wir zwei verschiedene Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  müssen wir zeigen, dass es genau eine Gerade  $g \in \underline{G}_{\mathbb{R}}$  gibt, sodass  $P, Q \in g$ . Wir setzen  $v = P - Q \in \mathbb{R}^2$ . Da  $P$  und  $Q$  verschiedene Punkte sind, gilt  $v \neq 0$ . Wir behaupten nun, dass  $P, Q \in g_{P,v} = \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Dass  $P \in g_{P,v}$ , ist klar. Aber es gilt auch

$$Q = P + (Q - P) = P + v \in g_{P,v}.$$

Wir müssen jetzt noch die Eindeutigkeit nachweisen. Wir nehmen an, dass  $P, Q \in g_{A,w}$  für ein  $A \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , und wollen zeigen, dass  $g_{P,v} = g_{A,w}$ . Nach Proposition 3.10 reicht es zu zeigen, dass  $P \in g_{A,w}$  und  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ . Die erste Aussage gilt nach Annahme. Um die zweite zu zeigen, schreiben wir  $P$  und  $Q$  in der Form

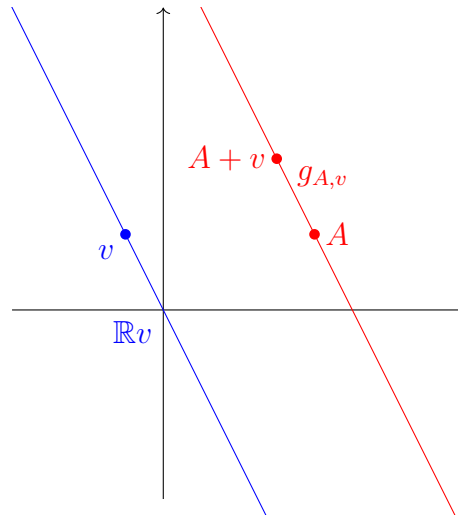
$$\begin{aligned} P &= A + \lambda_P w, \\ Q &= A + \lambda_Q w \end{aligned}$$

mit  $\lambda_P, \lambda_Q \in \mathbb{R}$ , was möglich ist, da  $P, Q \in g_{A,w}$ . Dann folgt

$$v = Q - P = (A + \lambda_P w) - (A + \lambda_Q w) = (\lambda_P - \lambda_Q)w.$$

Da  $P$  und  $Q$  verschieden sind, ist  $\lambda_P \neq \lambda_Q$ . Daher ist  $\lambda_P - \lambda_Q \neq 0$ , und aus obiger Gleichung folgt  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ . Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass  $g_{P,v} = g_{A,w}$ , also dass die Verbindungsgerade zwischen  $P$  und  $Q$  eindeutig ist.

- (I<sub>2</sub>) Wir müssen zeigen, dass es auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte gibt. Dazu betrachten wir eine beliebige Gerade  $g \in \underline{G}_{\mathbb{R}}$ . Nach Definition ist sie von der Form  $g_{A,v}$  für  $A \in \mathbb{R}^2$  und  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Da  $v \neq 0$  ist, sind  $A$  und  $A+v$  zwei verschiedene Punkte auf  $g$ .



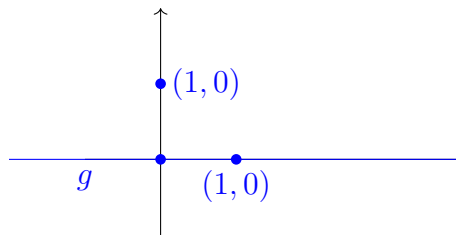
- (I<sub>3</sub>) Wir müssen drei Punkte in allgemeiner Lage finden. Wir behaupten, dass

$$\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$

in allgemeiner Lage sind. Die Verbindungsgerade von  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$  ist

$$g = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Nach (I<sub>1</sub>) ist das die einzige Gerade, die sowohl  $(0, 0)$  als auch  $(1, 0)$  enthält. Um zu zeigen, dass die drei Punkte in allgemeiner Lage sind, genügt es, uns davon zu überzeugen, dass  $(0, 1) \notin g$ . Alle Punkte in  $g$  haben eine Null in der zweiten Komponente, daher ist  $(0, 1) \notin g$ .



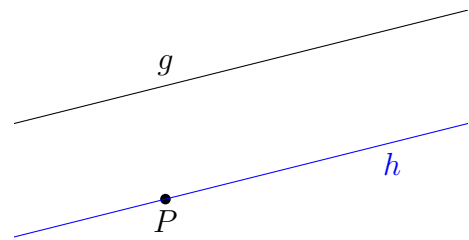
□

**Definition 3.12.** Die Inzidenzebene  $(\mathbb{R}^2, \underline{G}_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}})$  heißt *reelle affine Ebene* und wird mit  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  bezeichnet.

**Bemerkung 3.13.** Wir haben oben die reelle affine Ebene konstruiert. Statt mit  $\mathbb{R}$  könnten wir die gleiche Konstruktion mit jedem beliebigen Körper machen. Es ist eine Übungsaufgabe, zu prüfen, dass alle Beweise für jeden Körper richtig sind.

#### 4. AFFINE EBENEN

In Abschnitt 3.1 haben wir Inzidenzebenen behandelt. Aus den Axiomen  $I_1, I_2$  und  $I_3$  haben wir bereits einige einfache Eigenschaften hergeleitet. Viel weiter kommen wir allein mit den Axiomen der Inzidenzebenen allerdings nicht. Sie sind zu schwach. Oder in anderen Worten: es gibt viele Inzidenzebenen, die zwar die Axiome erfüllen, aber sonst nicht unserer Intuition entsprechen.

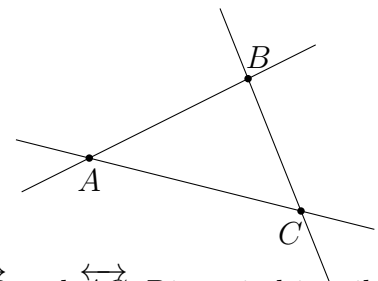


**Definition 4.1.** Sei  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  eine Inzidenzebene. Dann erfüllt  $\mathcal{I}$  das

- (wP) *schwache Parallelenaxiom*,<sup>1</sup> wenn es für jede Gerade  $g \in \underline{G}$  und jeden Punkt  $P \in \underline{P}$  höchstens eine Gerade  $h \in \underline{G}$  gibt, auf der  $P$  liegt, und die parallel zu  $g$  ist ( $h \parallel g$ ).
- (sP) *starke Parallelenaxiom*,<sup>2</sup> wenn es für jeden Punkt  $P \in \underline{P}$  genau eine Gerade  $h \in \underline{G}$  gibt, auf der  $P$  liegt, so dass  $h \parallel g$ .

**Definition 4.2.** Eine Inzidenzebene, die das starke Parallelenaxiom (sP) erfüllt, heißt *affine Ebene*.

**Beispiel 4.3.** Die Inzidenzebene von Beispiel 3.3 mit  $\underline{P} = \{A, B, C\}$  und  $\underline{G} = \{\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}\}$  erfüllt (wP), aber nicht (sP):



Sei  $P \in \underline{P}$  ein Punkt, und  $g \in \underline{G}$  eine Gerade. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $P = A$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

$g = \overleftrightarrow{BC}$ . Die einzigen Geraden, die durch  $A$  laufen, sind  $\overleftrightarrow{AB}$  und  $\overleftrightarrow{AC}$ . Diese sind jeweils nicht parallel zu  $\overleftrightarrow{BC}$ , denn sie sind ungleich  $\overleftrightarrow{BC}$ , haben aber einen Schnittpunkt mit  $\overleftrightarrow{BC}$ . Daher gibt es keine Parallele zu  $g$ , die durch  $A$  läuft.

<sup>1</sup>„w“ wie *weak*

<sup>2</sup>„s“ wie *strong*

$g = \overleftrightarrow{AB}$  oder  $g = \overleftrightarrow{AC}$ . In diesem Fall liegt  $A$  auf  $g$  und die gesuchte Parallele ist  $g$  selbst. Eine andere kann es nicht geben, da eine Parallele ungleich  $g$  keinen Schnittpunkt mit  $g$  hat.

Aus dem ersten Fall schließen wir, dass  $(sP)$  nicht erfüllt ist. In beiden Fällen gibt es entweder eine oder null Parallelen. Daher ist Axiom  $(wP)$  erfüllt.

**Beispiel 4.4.** Die Inzidenzebene mit vier Punkten

$$\underline{P} = \{A, B, C, D\}$$

und sechs Geraden

$$\underline{G} = \{\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{CD}\}$$

erfüllt  $(sP)$ , ist also eine affine Ebene:

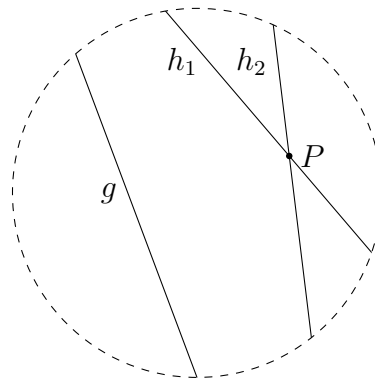
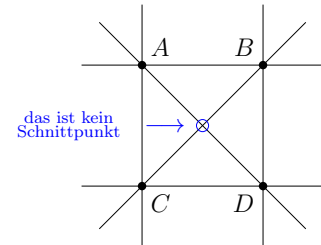
Zuerst müssen wir noch die Relation „liegt auf“ definieren. Sie ist schon implizit in der Notation für  $\underline{G}$  enthalten, die suggeriert, dass es zu je zwei Punkten eine Verbindungsgerade gibt, und auf dieser Verbindungsgerade keine weiteren Punkte liegen. Formal definieren wir dementsprechend

$$R = \{(P, \overleftrightarrow{PQ}), (P, \overleftrightarrow{QP}) \mid Q \in \underline{P}, Q \neq P\}.$$

Also gilt zum Beispiel  $(A, \overleftrightarrow{AB}) \in R$ , aber  $(A, \overleftrightarrow{BC}) \notin R$ .

Die Überprüfung des starken Parallelenaxioms  $(sP)$  ist eine Übungsaufgabe.

**Beispiel 4.5.** Das Kleinsche Modell von Übungsblatt 4 erfüllt weder  $(wP)$  noch  $(sP)$ .



Die beiden Geraden  $h_1$  und  $h_2$  gehen beide durch  $P$  und sind parallel zu  $g$ . Die präzise Argumentation ist Teil der Übungsaufgabe.

**4.1. Die reelle affine Ebene.** Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass die reelle affine Ebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , die wir in Abschnitt 3.1 studiert haben, tatsächlich eine affine Ebene im Sinne von Definition 4.2 ist. Zur Vorbereitung beweisen wir folgende Charakterisierung von Parallelität.

**Proposition 4.6.** Seien  $A, B, v, w \in \mathbb{R}^2$  mit  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $g_{A,v} \parallel g_{B,w}$
- (ii)  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$

Für den Beweis brauchen wir eine explizite Charakterisierung der Bedingung  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ .

**Lemma 4.7.** Seien  $v = (v_1, v_2)$  und  $w = (w_1, w_2)$  in  $\mathbb{R}^2$  mit  $v \neq 0$  (das bedeutet, entweder  $v_1 \neq 0$  oder  $v_2 \neq 0$ ) und  $w \neq 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$   
(ii)  $v_1w_2 = v_2w_1$

*Beweis.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“. Da  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$  ist, ist insbesondere  $v$  in  $\mathbb{R}w$  enthalten. Das heißt, es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}$ , mit

$$v = \lambda w.$$

In Koordinaten bedeutet das

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda w_1, \\ v_2 &= \lambda w_2. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die obere Gleichung mit  $w_2$  und die untere mit  $w_1$ :

$$\begin{aligned} v_1w_2 &= \lambda w_1w_2, \\ v_2w_1 &= \lambda w_2w_1. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht nun bei beiden Gleichungen das Gleiche, also sind auch die linken Seiten gleich:

$$v_1w_2 = v_2w_1.$$

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“. Wir nehmen an, dass  $v_1w_2 = v_2w_1$  gilt. Ist  $w_2 \neq 0$ , können wir beide Seiten durch  $w_2$  teilen und erhalten

$$v_1 = \left( \frac{v_2}{w_2} \right) w_1.$$

Außerdem gilt (offensichtlich)

$$v_2 = \left( \frac{v_2}{w_2} \right) w_2.$$

Diese beiden Gleichungen kombiniert ergeben

$$v = \left( \frac{v_2}{w_2} \right) w \quad \text{also } v \in \mathbb{R}w.$$

Ist  $w_2 = 0$ , so gilt

$$v_1w_2 = v_2w_1 = 0.$$

Da nach Annahme  $w \neq 0$ , also  $w_1 \neq 0$  ist, folgt  $v_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} v = (v_1, v_2) &= (v_1, 0) = \left( \frac{v_1}{w_1} \right) (w_1, 0) \\ &= \left( \frac{v_1}{w_1} \right) (w_1, w_2) = \left( \frac{v_1}{w_1} \right) w. \end{aligned}$$

Das heißt, auch in diesem Fall gilt  $v \in \mathbb{R}w$ . Aus  $v \in \mathbb{R}w$  folgt  $\lambda v \in \mathbb{R}w$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , also  $\mathbb{R}v \subseteq \mathbb{R}w$ .

Die andere Inklusion  $\mathbb{R}w \subseteq \mathbb{R}v$  zeigt man genau so mit vertauschten Rollen für  $v$  und  $w$ .  $\square$

*Beweis von Proposition 4.6.* „(ii)  $\Rightarrow$  (i)“. Wir nehmen an, dass  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ , und müssen zeigen, dass entweder  $g_{A,v} = g_{B,w}$  ist, oder  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  keinen Schnittpunkt besitzen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1:  $B$  liegt auf  $g_{A,v}$ . Dann folgt mit Proposition 3.10, dass  $g_{A,v} = g_{B,w}$ . Insbesondere sind die beiden Geraden parallel.

Fall 2:  $B$  liegt nicht auf  $g_{A,v}$ . Dann gilt  $g_{A,v} \neq g_{B,w}$ , und wir müssen zeigen, dass  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  keinen Schnittpunkt haben. Wäre  $P$  ein Schnittpunkt, so gäbe es  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\begin{aligned} P &= A + \lambda v, \\ P &= B + \mu w. \end{aligned}$$

Da  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ , gibt es  $\lambda' \in \mathbb{R}$  mit

$$\mu w = \lambda' v.$$

Einsetzen in obige Gleichungen ergibt

$$A + \lambda v = P = B + \mu w = B + \lambda' v.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten  $\lambda' v$  ab, erhalten wir

$$A + (\lambda - \lambda')v = B.$$

Es folgt, dass  $B$  auf  $g_{A,v}$  liegt, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Folglich kann es keinen Schnittpunkt geben, und  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  sind parallel.

„(i)  $\Rightarrow$  (ii)“. Wir stellen zwei Beweise vor. Der erste ist expliziter, aber erfordert kein Vorwissen. Der zweite ist konzeptioneller, aber benutzt lineare Algebra.

*Version 1: Explizite Rechnung.* Wir nehmen an, dass  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  parallel sind. Ist  $g_{A,v} = g_{B,w}$ , so folgt nach Proposition 3.10, dass  $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$  ist. Sei nun  $g_{A,v} \neq g_{B,w}$ . Wir nehmen an, dass  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$  ist, und wollen daraus einen Widerspruch herleiten. Wir schreiben  $v = (v_1, v_2)$  und  $w = (w_1, w_2)$  für  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt nach Lemma 4.7

$$v_1 w_2 \neq v_2 w_1,$$

also  $v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$ . Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  einen Schnittpunkt haben. Ein Schnittpunkt ist ein Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$ , der eine Darstellung der Form

$$P = A + \lambda v$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  hat (da  $P$  auf  $g_{A,v}$  liegt) und auch eine Darstellung der Form

$$P = B + \mu w$$

für ein  $\mu \in \mathbb{R}$  (da  $P$  auf  $g_{B,w}$  liegt). Wir müssen daher  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  finden, so dass

$$A + \lambda v = B + \mu w.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} A &= (A_1, A_2) \\ B &= (B_1, B_2) \end{aligned}$$

für  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ . Dann müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + \lambda v_1 &= B_1 + \mu w_1 \\ A_2 + \lambda v_2 &= B_2 + \mu w_2 \end{aligned}$$

lösen, wobei  $\mu$  und  $\lambda$  die Unbekannten sind.

Wenn  $v_1 \neq 0$  ist, können wir die erste Gleichung nach  $\lambda$  auflösen. In anderen Worten, die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$\lambda = \frac{B_1 - A_1 - \mu w_1}{v_1}.$$

Das können wir in die zweite Gleichung einsetzen und erhalten das äquivalente Gleichungssystem

$$\lambda = \frac{B_1 - A_1 - \mu w_1}{v_1}$$

$$A_2 + \frac{B_1 - A_1 - \mu w_1}{v_1} \cdot v_2 = B_2 + \mu w_2.$$

Nun stellen wir die zweite Gleichung um:

$$A_2 + \frac{v_2}{v_1} B_1 - \frac{v_2}{v_1} A_1 - B_2 = \mu \left( w_2 - \frac{v_2 w_1}{v_1} \right) = \mu \frac{v_1 w_2 - v_2 w_1}{v_1}.$$

Wir haben angenommen, dass  $v_1 \neq 0$  ist. Außerdem ist  $v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$ , da  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ . Daher können wir mit  $\frac{v_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1}$  multiplizieren, und erhalten die äquivalente Gleichung

$$\mu = \frac{v_1 A_2 + v_2 B_1 - v_2 A_1 - v_1 B_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{B_1 - A_1 - \mu w_1}{v_1} \\ &= \frac{v_1 w_2 B_1 - v_2 w_1 B_1 - v_1 w_2 A_1 + v_2 w_1 A_1 + v_1 w_1 A_2 + v_2 w_1 B_1 - v_2 w_1 A_1 - v_1 w_1 B_2}{v_1 (v_1 w_2 - v_2 w_1)} \\ &= \frac{w_2 B_1 - w_2 A_1 + w_1 A_2 - w_1 B_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1}. \end{aligned}$$

Wir haben das Gleichungssystem nun für den Fall  $v_1 \neq 0$  gelöst. Ist  $v_1 = 0$ , so muss  $v_2 \neq 0$  sein, da  $v \neq 0$  ist. Dann können wir die gleiche Rechnung mit vertauschten Rollen der ersten und zweiten Gleichung durchführen, und erhalten die gleichen Formeln für  $\lambda$  und  $\mu$ .

Folglich hat das Gleichungssystem eine Lösung, und es gibt einen Schnittpunkt. Diesen kann man auch explizit angeben:

$$\begin{aligned} A + \lambda v &= A + \frac{w_2 B_1 - w_2 A_1 + w_1 A_2 - w_1 B_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1} \cdot v \\ &= \frac{1}{v_1 w_2 - v_2 w_1} (-v_2 w_1 A_1 + v_1 w_2 B_1 + v_1 w_1 A_2 - v_1 w_1 B_2, \\ &\quad v_1 w_2 A_2 + v_2 w_2 B_1 + v_2 w_2 A_1 - v_2 w_1 B_2) \end{aligned}$$

*Version 2: mit linearer Algebra.* Wieder nehmen wir an, dass  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$  ist, und wollen zeigen, dass  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  einen Schnittpunkt besitzen.

$\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$  ist gleichbedeutend damit, dass es  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt mit  $v = \alpha w$ , also dass  $v$  und  $w$  linear abhängig sind. In unserem Fall gilt nun  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ , also sind  $v$  und  $w$  linear unabhängig.

Da die Dimension von  $\mathbb{R}^2$  gleich 2 ist, bilden  $v$  und  $w$  somit eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . In dieser Basis können wir den Vektor  $B - A \in \mathbb{R}^2$  darstellen. Das heißt, wir finden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , so dass

$$B - A = \lambda v - \mu w$$

ist. Das ist äquivalent zu

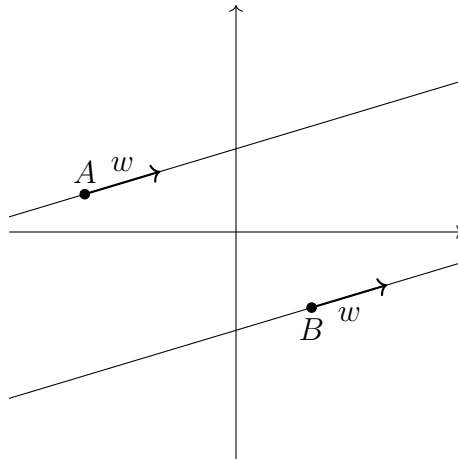
$$B + \mu w = A + \lambda v.$$

Das heißt, der Punkt  $A + \lambda v$  liegt auf  $g_{A,v}$  und gleichzeitig auch auf  $g_{B,w}$  (da  $A + \lambda v = B + \mu w$ ) und ist somit ein Schnittpunkt.  $\square$

**Satz 4.8.** Die reelle affine Ebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  ist eine affine Ebene.

*Beweis.* Nach Satz 3.11 ist  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  eine Inzidenzebene. Um zu zeigen, dass  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  eine affine Ebene ist, müssen wir noch das starke Parallelenaxiom ( $sP$ ) nachprüfen.

Dazu sei  $A \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt, und  $g = g_{B,w}$  (für  $B \in \mathbb{R}^2$  und  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ) eine Gerade. Wir müssen eine eindeutige Parallele  $h$  zu  $g$  finden, die durch  $A$  verläuft. Wir behaupten, dass  $g_{A,w}$  die gesuchte Gerade ist.



Offensichtlich liegt  $A$  auf  $g_{A,w}$ . Außerdem sind die Richtungen von  $g_{A,w}$  und  $g_{B,w}$  beide gleich  $\mathbb{R}w$ . Also sind die beiden Geraden  $g_{A,w}$  und  $g_{B,w}$  nach Proposition 4.6 parallel.

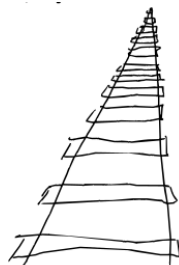
Wir müssen jetzt noch die Eindeutigkeit der Parallelen beweisen. Dafür sei  $g_{A',w'}$  (mit  $A' \in \mathbb{R}^2$ ,  $w' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ) eine Parallele zu  $g_{B,w}$ , die durch  $A$  verläuft. Da  $g_{A',w'}$  und  $g_{B,w}$  parallel sind, sind nach Proposition 4.6 die Richtungen gleich, also  $\mathbb{R}w' = \mathbb{R}w$ . Daher gilt

$$g_{A',w'} = A' + \mathbb{R}w' = A' + \mathbb{R}w = g_{A,w}.$$

Außerdem liegt  $A$  auf  $g_{A',w'} = g_{A,w}$ . Daher folgt nach Proposition 3.10, dass  $g_{A',w'} = g_{A,w}$ . Wir haben also gezeigt, dass die beliebig gewählte Parallele  $g_{A',w'}$  zu  $g_{B,w}$  durch  $A$  gleich der anfangs konstruierten Parallele  $g_{A,w}$  ist. Somit ist die Eindeutigkeit gezeigt.  $\square$

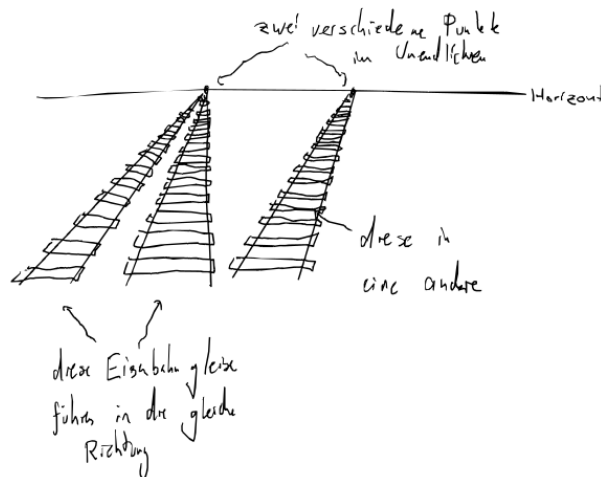
## 5. PROJEKTIVE EBENEN

Vielleicht ist dem einen oder anderen schon die Formulierung begegnet, dass sich „parallele Geraden im Unendlichen schneiden“. Beispielsweise taucht diese Vorstellung beim perspektivischen Zeichnen auf. Hier sieht man etwa ein Eisenbahngleis, das scheinbar bis ins Unendliche verläuft.



Die beiden Schienen sollten eigentlich parallel zueinander sein, und sich nicht schneiden. Trotzdem scheinen sie in dem Bild einen Schnittpunkt zu haben. Wir stellen uns aber vor, dass dieser Schnittpunkt im Unendlichen liegt, also nicht in unserer Realität.

Es sollte nicht nur einen einzigen Punkt im Unendlichen geben, sondern einen für jede Richtung. Auch das kann man mit dem Bild der Eisenbahngleise klar machen.



Wir wollen uns im Folgenden damit beschäftigen, wie man diesen Aussagen eine präzise Bedeutung geben kann.

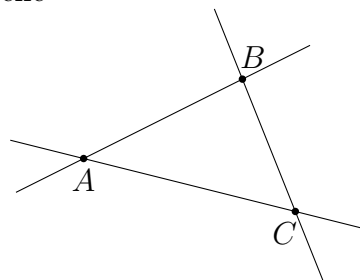
**5.1. Die Axiome der projektiven Ebene.** Intuitiv wollen wir eine Ebene beschreiben, die auch unendlich ferne Punkte enthält, in denen sich scheinbar parallele Geraden dann doch schneiden. Anders ausgedrückt sollte es in einer projektiven Ebene keine parallelen Geraden geben, die nicht identisch zueinander sind. Genau das wird in den Axiomen einer projektiven Ebene gefordert.

**Definition 5.1.** Eine *projektive Ebene* ist eine Inzidenzebene  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  mit folgenden Eigenschaften:

- ( $P_1$ ) Auf jeder Gerade liegen mindestens *drei* Punkte.
- ( $P_2$ ) Je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt.

Später werden wir sehen, dass man aus einer projektiven Ebene eine affine Ebene konstruieren kann, indem man eine beliebige Gerade zusammen mit allen Punkten, die auf ihr liegen, entfernt. Diese Gerade kann man sich als die unendlich ferne Gerade vorstellen, als den Horizont sozusagen. Wenn wir ( $P_1$ ) nicht fordern, bekommen wir allerdings Probleme.

**Beispiel 5.2.** Die Inzidenzebene



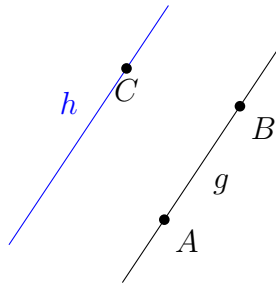
mit drei Punkten ist keine projektive Ebene, da die Geraden nur zwei Punkte haben. Entfernen wir eine Gerade und die Punkte, die darauf liegen, bleibt nur noch ein Punkt

übrig. Dieser eine Punkt kann keine affine Ebene bilden, genau genommen nicht einmal eine Inzidenzebene, da eine solche nach Axiom  $(I_3)$  mindestens drei Punkte hat.

**Beispiel 5.3.** Eine affine Ebene kann nicht gleichzeitig auch eine projektive Ebene sein, da sich das starke Parallelenaxiom  $(sP)$  und das zweite Axiom der projektiven Ebene  $(P_2)$  gegenseitig ausschließen:

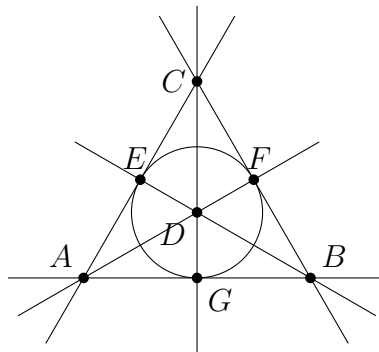
Angenommen  $\mathcal{I} = (\underline{P}, \underline{G}, R)$  ist eine Inzidenzebene, die  $(sP)$  und  $(P_2)$  erfüllt. Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage  $A, B, C \in \underline{P}$ . Sei  $g$  die Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$ . Da  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind, liegt  $C$  nicht auf  $g$ .

Nach  $(sP)$  gibt es eine Gerade  $h$ , die durch  $C$  verläuft, und parallel zu  $g$  ist.



Nach  $(P_2)$  schneiden sich  $g$  und  $h$ . Da  $g$  und  $h$  parallel sind, ist das nur möglich, wenn  $g = h$  gilt. Aber  $C$  liegt auf  $h$  und nicht auf  $g$ . Das führt zum Widerspruch.

**Beispiel 5.4.** Die Fano-Ebene ist eine projektive Ebene.



Auf jeder Geraden liegen drei Punkte. Also ist Axiom  $(P_1)$  erfüllt. Außerdem haben je zwei Geraden einen Schnittpunkt.

**5.2. Die reelle projektive Ebene.** Wir werden in diesem Abschnitt die reelle projektive Ebene definieren, und zeigen, dass es sich tatsächlich um eine projektive Ebene handelt. Die Menge der Punkte wird dabei gleich einer Menge von Geraden im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  sein, und die Menge der Geraden gleich einer Menge von Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ . Dementsprechend untersuchen wir als Vorbereitung Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum.

Wir brauchen nur Geraden und Ebenen, die durch den Nullpunkt verlaufen.

**Definition 5.5.**

(i) Eine Gerade in  $\mathbb{R}^3$  durch  $0$  ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  der Form

$$\mathbb{R}v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

für  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

(ii) Eine Ebene in  $\mathbb{R}^3$  durch 0 ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  der Form

$$\mathbb{R}v + \mathbb{R}w = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

für linear unabhängige  $v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Dass  $v$  und  $w$  linear unabhängig sind, bedeutet, dass  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$  ist, und dass  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ . Das heißt,  $v$  und  $w$  zeigen in unterschiedliche Richtungen.

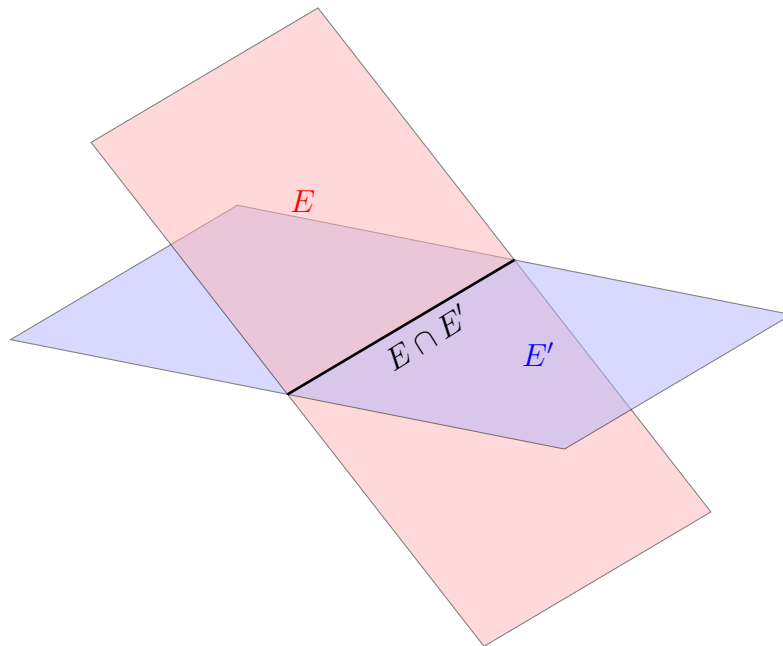
In der Sprache der linearen Algebra kann man alternativ sagen, dass eine Gerade in  $\mathbb{R}^3$  durch 0 ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension 1 ist, und eine Ebene in  $\mathbb{R}^3$  durch 0 ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension 2.

**Lemma 5.6.** Seien

$$E = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w,$$

$$E' = \mathbb{R}v' + \mathbb{R}w'$$

Ebenen in  $\mathbb{R}^3$  durch 0, das heißt  $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  mit  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ , und  $\mathbb{R}v' \neq \mathbb{R}w'$ . Dann ist der Durchschnitt  $E \cap E'$  entweder eine Gerade in  $\mathbb{R}^3$  durch 0, oder  $E = E'$ .



*Beweis.* Wir stellen wieder einen Beweis ohne und einen mit linearer Algebra vor.

*Version 1: explizite Rechnung.* Um den Durchschnitt  $E \cap E'$  zu berechnen, müssen wir alle Quadrupel reeller Zahlen  $(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  finden, die die Gleichung

$$\lambda v + \mu w = \lambda' v' + \mu' w'$$

erfüllen.

In Wirklichkeit ist das ein Gleichungssystem von drei Gleichungen

$$\lambda v_1 + \mu w_1 = \lambda' v'_1 + \mu' w'_1$$

$$\lambda v_2 + \mu w_2 = \lambda' v'_2 + \mu' w'_2$$

$$\lambda v_3 + \mu w_3 = \lambda' v'_3 + \mu' w'_3,$$

wobei  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ ,  $w' = (w'_1, w'_2, w'_3)$ . Dieses Gleichungssystem kann man nun explizit lösen, und so das Lemma beweisen. Diese Rechnung ist aber eher hässlich und lang. Deshalb werden wir sie nicht durchführen.  $\diamond$

*Version 2: mit linearer Algebra.* Der Durchschnitt  $E \cap E'$  kann nicht leer sein, da  $0 \in \mathbb{R}^3$  in beiden Ebenen nach Voraussetzung enthalten ist. Wir zeigen zunächst, dass es außer der 0 noch einen weiteren Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  gibt, der in  $E$  und  $E'$  enthalten ist.

Da  $\mathbb{R}^3$  nur dreidimensional ist, müssen die vier Vektoren  $v, w, v', w'$  untereinander linear abhängig sein. Das heißt, es gibt  $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ , die nicht alle 0 sind, sodass

$$\lambda v + \mu w + \lambda' v' + \mu' w' = 0.$$

Subtrahieren wir  $\lambda' v' + \mu' w'$ , erhalten wir

$$\lambda v + \mu w = -\lambda' v' - \mu' w'.$$

Die linke Seite ist in  $E$ , und die rechte Seite ist in  $E'$  enthalten. Daher ist  $\lambda v + \mu w$  im Durchschnitt  $E \cap E'$  enthalten. Wir müssen uns noch davon überzeugen, dass

$$\lambda v + \mu w \neq 0$$

ist. Wäre  $\lambda v + \mu w = 0$ , so würde folgen, dass  $\lambda = \mu = 0$  ist, da  $v$  und  $w$  linear unabhängig sind. Außerdem würde gälte  $-\lambda' v' - \mu' w' = \lambda v + \mu w = 0$ . Da wiederum  $v'$  und  $w'$  linear unabhängig sind, würde das implizieren, dass  $\lambda' = \mu' = 0$  ist. Aber  $\lambda = \mu = \lambda' = \mu' = 0$  haben wir ausgeschlossen.  $\zeta$  Wir schließen daraus, dass

$$\lambda v + \mu w \neq 0$$

ist. Der gesuchte Punkt  $P$  kann also gewählt werden als  $P = \lambda v + \mu w$ .

Wir wissen nun, dass die Gerade  $\mathbb{R}P$  in beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  enthalten ist. Falls  $E \cap E' = \mathbb{R}P$  gilt, sind wir fertig. Wenn nicht, dann ist  $\mathbb{R}P$  eine echte Teilmenge von  $E \cap E'$ , und es gibt  $Q \in E \cap E'$  mit  $Q \notin \mathbb{R}P$ . Damit sind auch alle Linearkombinationen  $\alpha P + \beta Q$  in  $E$  enthalten. Dass  $Q \notin \mathbb{R}P$ , bedeutet, dass  $P$  und  $Q$  linear unabhängig sind. Außerdem liegen beide in  $E$ , was ein zweidimensionaler Vektorraum ist. Daher bilden  $P$  und  $Q$  eine Basis von  $E$ . Das bedeutet, dass man jeden Punkt in  $E$  als Linearkombination  $\alpha P + \beta Q$  schreiben kann. Aber alle Punkte dieser Form liegen im Durchschnitt  $E \cap E'$ . Folglich gilt

$$E \cap E' = E.$$

Aus Symmetriegründen (also, indem wir das gleiche Argument anwenden, aber  $E$  und  $E'$  tauschen) folgt

$$E \cap E' = E'.$$

Insgesamt gilt also in diesem Fall  $E = E'$ .  $\square$

Wir definieren

$$\underline{P}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} := \{g \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ Gerade durch } 0\}$$

$$\underline{E}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} := \{E \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ Ebene durch } 0\}$$

$$R_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} := \{(g, E) \in \underline{P}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \times \underline{E}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \mid g \subseteq E\}$$

und wollen zeigen, dass

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := (\underline{P}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}, \underline{E}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}, R_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})})$$

die Axiome einer projektiven Ebene erfüllt.

**Satz 5.7.** *Das Tripel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist eine projektive Ebene.*

*Beweis.* Wir überprüfen zunächst die Axiome der Inzidenzebene aus Definition 3.2.

- (I<sub>1</sub>) Gegeben seien zwei verschiedene Punkte von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , also zwei Geraden der Form  $g_1 = \mathbb{R}v_1$  und  $g_2 = \mathbb{R}v_2$  im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ , mit  $\mathbb{R}v_1 \neq \mathbb{R}v_2$ . Wir müssen also eine eindeutig bestimmte Gerade in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , also eine Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  durch 0 finden, die  $g_1$  und  $g_2$  enthält. Diese Ebene ist gerade gegeben durch

$$E := \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2.$$

Das ist tatsächlich eine Ebene in  $\mathbb{R}^3$ , da  $\mathbb{R}v_1 \neq \mathbb{R}v_2$  ist. Außerdem enthält  $E$  die beiden Geraden  $g_1 = \mathbb{R}v_1$  und  $g_2 = \mathbb{R}v_2$ .

Für die Eindeutigkeit brauchen wir wieder lineare Algebra. Sei  $E'$  eine Ebene durch 0, die  $g_1$  und  $g_2$  enthält. Die Ebene  $E'$  ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ , der die beiden Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  enthält. Die Bedingung  $g_1 \neq g_2$  bedeutet, dass  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängig sind. Der zweidimensionale Vektorraum  $E'$  enthält dementsprechend die beiden linear unabhängigen Vektoren  $v_1$  und  $v_2$ . Diese bilden daher eine Basis von  $E'$ , und folglich gilt

$$E' = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = E.$$

- (I<sub>2</sub>) Wir müssen zeigen, dass jede Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  durch 0 mindestens zwei Geraden durch 0 enthält. Eine solche Ebene ist von der Form

$$E = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$$

für zwei linear unabhängige Vektoren  $v$  und  $w$  in  $\mathbb{R}^3$ , also  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ . Somit haben wir mit  $\mathbb{R}v$  und  $\mathbb{R}w$  zwei verschiedene Geraden gefunden, die in  $E$  liegen.

- (I<sub>3</sub>) Drei Punkte in allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  entsprechen drei Geraden  $g_1, g_2$  und  $g_3$  in  $\mathbb{R}^3$  durch 0, für die es keine Ebene gibt, die alle drei gemeinsam enthält. Beispielsweise können wir wählen:

$$g_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0),$$

$$g_2 = \mathbb{R}(0, 1, 0),$$

$$g_3 = \mathbb{R}(0, 0, 1).$$

Wir behaupten, dass  $\mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathbb{R}^3$ , dass also die Punkte  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  den ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  erzeugen. Dann können die drei Geraden  $g_1, g_2, g_3$  nicht in einer Ebene enthalten sein. In der Tat kann man jeden beliebigen Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  in der Form

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$$

schreiben, was die Behauptung beweist.

Man kann auch schneller sehen, dass  $g_1, g_2$  und  $g_3$  in keiner Ebene liegen, indem man erkennt, dass  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  linear unabhängig sind, und folglich nicht in einem zweidimensionalen Vektorraum enthalten sind.

Nun haben wir uns davon überzeugt, dass  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  eine Inzidenzebene ist. Es fehlt noch, die Axiome ( $P_1$ ) und ( $P_2$ ) einer projektiven Ebene nachzuweisen (Definition 5.1).

- (P<sub>1</sub>) Wir müssen zeigen, dass jede Ebene  $E$  durch 0 mindestens drei Geraden durch 0 enthält. Die Ebene  $E$  ist von der Form

$$E = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$$

für  $v, w \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ . Dann ist auch  $\mathbb{R}(v+w)$  in  $E$  enthalten. Wir wollen uns davon überzeugen, dass

$$\mathbb{R}v, \mathbb{R}w, \mathbb{R}(v+w)$$

paarweise verschieden sind. Dass  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$  ist, gilt nach Konstruktion. Wäre

$$\mathbb{R}v = \mathbb{R}(v+w),$$

so gäbe es  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$v+w = \lambda v.$$

Dass ist äquivalent zu

$$w = (\lambda - 1)v,$$

was im Widerspruch zu  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$  steht. Genauso zeigt man, dass  $\mathbb{R}w \neq \mathbb{R}(v+w)$  ist. Damit haben wir drei verschiedene Geraden in  $E$  gefunden.

Wir wollen hier noch anmerken, dass wir  $(I_2)$  nicht hätten zeigen brauchen, weil das aus  $(P_1)$  folgt.

$(P_2)$  Wir müssen zeigen, dass sich zwei verschiedene Ebenen in einer eindeutigen Gerade schneiden. Das ist gerade der Inhalt von Lemma 5.6.

□

## 6. MORPHISMEN VON INZIDENZEBENEN

In diesem Abschnitt untersuchen wir Abbildungen von einer Inzidenzebene  $\mathcal{I}_1$  in eine andere Inzidenzebene  $\mathcal{I}_2$ . Dabei sollte die Struktur erhalten bleiben, es sollten also Geraden auf Geraden abgebildet werden. Es geht uns zunächst darum, die richtige Definition eines Morphismus  $\mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$  zu finden. Dafür schauen wir uns einige Beispiele an, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was ein Morphismus sein sollte, und was nicht.

**Beispiel 6.1.** Wir betrachten die reelle affine Ebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ . Auf der Menge der Punkte  $\underline{P}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^2$  betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Gerade

$$g_{A,v} = A + \mathbb{R}v = \{A + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

für  $A \in \mathbb{R}^2$  und  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Ein Punkt  $x = A + \lambda v$  auf der Gerade  $g_{A,v}$  wird von  $\varphi$  abgebildet auf

$$\varphi(x) = 2(A + \lambda v) = 2A + 2\lambda v.$$

Variieren wir  $\lambda \in \mathbb{R}$ , stellen wir fest, dass alle Bildpunkte auf der Gerade

$$g_{2A,v} = g_{2A,2v} = 2A + \mathbb{R}v$$

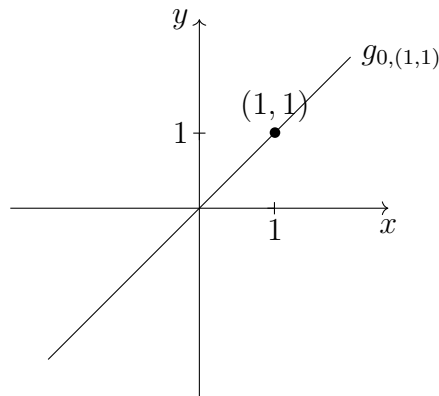
liegen. Die Gerade  $g_{A,v}$  wird also auf die Gerade  $g_{2A,v}$  abgebildet.

Diese Eigenschaft sollte ein Morphismus von Inzidenzebenen auf jeden Fall haben: er sollte Geraden auf Geraden abbilden.

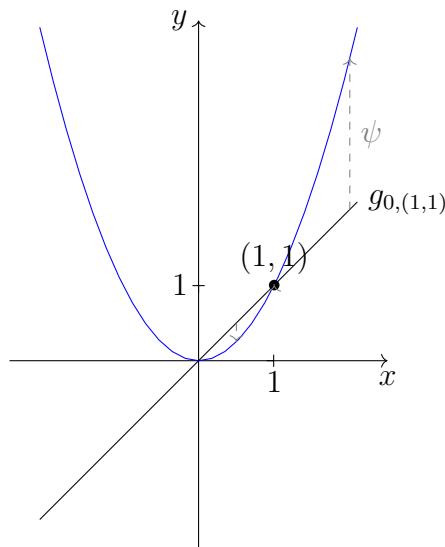
**Beispiel 6.2.** Wieder auf der reellen affinen Ebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y^2).\end{aligned}$$

Wir wollen uns überlegen, was mit der Geraden  $g_{0,(1,1)} = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  passiert.



Ein beliebiger Punkt  $(\lambda, \lambda) \in g_{0,(1,1)}$  wird abgebildet auf  $\psi(\lambda, \lambda) = (\lambda, \lambda^2)$ . Die Menge der Bildpunkte ist eine Parabel und keine Gerade.



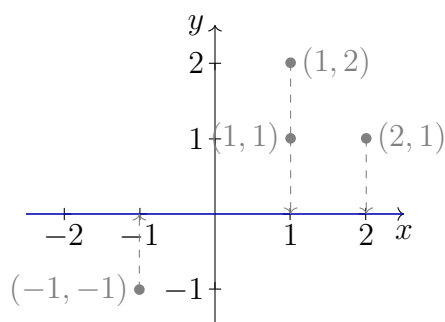
Die Abbildung  $\psi$  sollte kein Morphismus von Inzidenzebenen sein, weil aus der Geraden  $g_{0,(1,1)}$  eine Parabel geworden ist.

Wir lernen aus diesen beiden Beispielen, dass wir fordern sollten, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Allerdings können immer noch seltsame Phänomene auftreten.

**Beispiel 6.3.** Wir betrachten die folgende Abbildung auf den Punkten der reellen affinen Ebene:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0).\end{aligned}$$

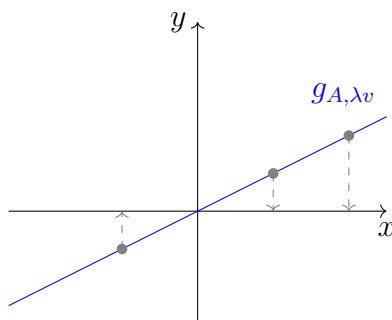
Bei der Abbildung  $\pi$  handelt es sich um die Projektion auf die  $x$ -Achse. Das Bild ist also gar keine Ebene mehr, sondern besteht nur noch aus einer Geraden. Wir wollen nun



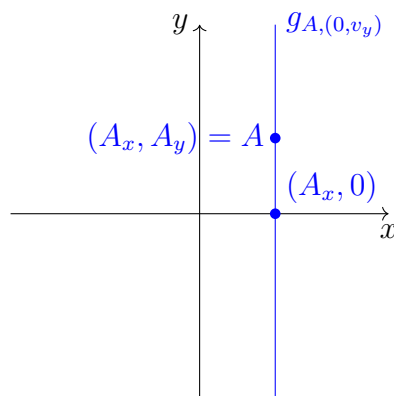
untersuchen, was mit den Geraden  $g_{A,v} = A + \mathbb{R}v$  passiert. Ein Punkt  $x = A + \lambda v$  wird auf

$$\pi(x) = (A_x, 0) + \lambda(v_x, 0) = (A_x + \lambda v_x, 0)$$

abgebildet, wobei  $A = (A_x, A_y)$  und  $v = (v_x, v_y)$ . Ist  $v_x \neq 0$ , so durchläuft  $(A_x + \lambda v_x, 0)$  die gesamte  $x$ -Achse.



Ist  $v_x = 0$ , so ist  $g_{A,v}$  parallel zur  $y$ -Achse.



Alle Punkte von  $g_{A,(0,v_y)}$  werden auf  $(A_x, 0)$  abgebildet. Sie landen also streng genommen auch alle auf einer Gerade, nämlich auf der  $x$ -Achse, nur ist die Abbildung nicht surjektiv. Das Bild von  $g_{A,(0,v_y)}$  ist nicht die ganze  $x$ -Achse, sondern ein einziger Punkt.

Aus den drei Beispielen haben wir einige Erkenntnisse darüber gewonnen, wie ein Morphismus von Inzidenzebenen aussehen sollte. Hier kommt nun die formale Definition.

**Definition 6.4.** Seien  $\mathcal{I}_1 = (\underline{P}_1, \underline{G}_1, R_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\underline{P}_2, \underline{G}_2, R_2)$  zwei Inzidenzebenen. Ein Morphismus von  $\mathcal{I}_1$  nach  $\mathcal{I}_2$  ist ein Paar  $f = (f_P, f_G)$  bestehend aus zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} f_P &: \underline{P}_1 \rightarrow \underline{P}_2 \\ f_G &: \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}_2 \end{aligned}$$

mit folgender Eigenschaft:

Für einen Punkt  $P_1 \in \underline{P}_1$  und eine Gerade  $g_1 \in \underline{G}_1$  ist  $(P_1, g_1)$  genau dann in  $R_1$ , wenn  $(f_P(P_1), f_G(g_1))$  in  $R_2$  sind.

Mit anderen Worten kann man die obige Bedingung auch so ausdrücken: Ein Punkt  $P_1 \in \underline{P}_1$  liegt genau dann auf einer Geraden  $g_1 \in \underline{G}_1$ , wenn das Bild  $f_P(P_1)$  auf dem Bild  $f_G(g_1)$  der Geraden liegt.

Als Kurzschreibweise schreiben wir oft einfach nur

$$f : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$$

für einen Morphismus von Inzidenzebenen. Gemeint ist hiermit dann, dass  $f$  ein Paar  $f = (f_P, f_G)$  ist bestehend aus zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} f_P &: \underline{P}_1 \rightarrow \underline{P}_2 \\ f_G &: \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}_2 \end{aligned}$$

die Eigenschaft aus der Definition erfüllen.

**Beispiel 6.5.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_P &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

aus Beispiel 6.1. Das ist eine Abbildung auf der Menge der Punkte  $\underline{P}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})}$  der reellen affinen Ebene. Um daraus einen Morphismus von Inzidenzebenen zu machen, brauchen wir noch eine Abbildung auf der Menge der Geraden. Wir haben in Beispiel 6.1 gesehen, dass  $\varphi$  eine Gerade  $g_{A,v}$  auf die Gerade  $g_{2A,v}$  abbildet. Somit ist es naheliegend, die Abbildung auf den Geraden folgendermaßen zu definieren:

$$\begin{aligned} \varphi_G &: \underline{G}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})} \rightarrow \underline{G}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})} \\ g_{A,v} &\mapsto g_{2A,v}. \end{aligned}$$

Wir überzeugen uns nun noch davon, dass das Paar  $(\varphi_P, \varphi_G)$  die geforderte Eigenschaft hat.

Für einen Punkt  $P$  auf der Geraden  $g_{A,v}$  gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$P = A + \lambda v.$$

Dann gilt

$$\varphi_P(P) = 2A + 2\lambda v \in g_{2A,v} = \varphi_G(g_{A,v}).$$

Nehmen wir andersherum an, dass  $\varphi_P(P)$  auf  $\varphi_G(g_{A,v})$  liegt. Dann gibt es  $\mu \in \mathbb{R}$ , so dass

$$2P = \varphi_P(P) = 2A + \mu v.$$

Daraus folgt

$$P = A + \frac{\mu}{2}v \in g_{A,v}.$$

**Beispiel 6.6.** Die Abbildung

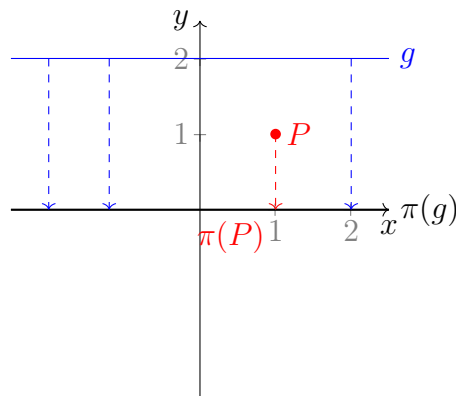
$$\begin{aligned}\psi_P : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y^2)\end{aligned}$$

definiert keinen Morphismus von Inzidenzebenen. Das kann man sich klar machen, indem man die Gerade  $g_{0,(1,1)}$  aus Beispiel 6.2 betrachtet. Wenn es einen Morphismus von Inzidenzebenen  $(\psi_P, \psi_G)$  gäbe, mit  $\psi_P(x) = x^2$ , so können wir uns fragen, auf welche Gerade  $g_{0,(1,1)}$  abgebildet wird. Die Bildpunkte aller Punkte auf  $g_{0,(1,1)}$  müssten auf dieser Geraden  $\psi_G(g_{0,(1,1)})$  liegen. Aber diese Bildpunkte bilden eine Parabel und keine Gerade, wie wir in Beispiel 6.2 gesehen haben.

**Beispiel 6.7.** Auch die Abbildung

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0)\end{aligned}$$

definiert keinen Morphismus von Inzidenzebenen. Dazu betrachten wir die beiden Punkte  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (1, 0)$  und die Gerade  $g = g_{(1,1),(1,0)}$ . Diese sollte auf die  $x$ -Achse  $g_{(0,0),(1,0)}$  abgebildet werden.



Dann liegt  $\pi(P)$  auf  $\pi(g)$ , aber  $P$  liegt nicht auf  $g$ .

**Lemma 6.8.** Seien  $\mathcal{I}_1 = (\underline{P}_1, \underline{G}_1, R_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\underline{P}_2, \underline{G}_2, R_2)$  Inzidenzebenen und

$$f = (f_P, f_G) : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$$

ein Morphismus von Inzidenzebenen. Dann sind  $f_P$  und  $f_G$  injektiv.

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte in  $\underline{P}_1$ , mit  $f_P(P) = f_P(Q)$ . Wir wählen eine Gerade  $g \in \underline{G}_1$ , die durch  $P$  verläuft, aber nicht durch  $Q$ . (Überzeugen Sie sich als Übungsaufgabe davon, dass eine solche Gerade existiert.) Da  $P$  auf  $g$  liegt, muss  $f_P(P)$  auf  $f_G(g)$  liegen. Aber  $f_P(P) = f_P(Q)$ . Weil nun also  $f_P(Q)$  auf  $f_G(g)$  liegt, müsste  $Q$  auf  $g$  liegen, was der Wahl von  $g$  widerspricht. Daher kann es keine zwei verschiedenen Punkte  $P$  und  $Q$  geben mit dem gleichen Bild in  $\underline{P}_2$ . Folglich ist  $f_P$  injektiv.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Geraden  $g$  und  $h$  in  $\underline{G}_1$  mit  $f_G(g) = f_G(h)$ . Sei  $P$  ein Punkt, der auf  $g$ , aber nicht auf  $h$  liegt. Dann liegt  $f_P(P)$  auf  $f_G(g) = f_G(h)$ . Dann müsste aber auch  $P$  auf  $h$  liegen, ein Widerspruch.  $\square$

Aus Lemma 6.8 hätten wir auch ganz schnell schließen können, dass die Abbildungen aus Beispiel 6.1 und Beispiel 6.2 keine Morphismen von Inzidenzebenen definieren, denn die dortigen Abbildungen sind nicht injektiv.

**Bemerkung 6.9.** Ist  $f = (f_P, f_G)$  ein Morphismus von der Inzidenzebene  $\mathcal{I}_1$  in die Inzidenzebene  $\mathcal{I}_2$ , so ist die Abbildung  $f_G$  eigentlich schon durch  $f_P$  eindeutig bestimmt: Wir betrachten eine Gerade  $g$  in  $\mathcal{I}_1$  und wollen ihr Bild  $f_G(g)$  bestimmen. Nach Axiom  $(I_2)$  liegen auf  $g$  zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$ . Nach Lemma 6.8 werden diese auf zwei verschiedene Punkte  $f_P(P)$  und  $f_P(Q)$  abgebildet. Das Bild  $f_G(g)$  der Geraden  $g$  muss durch  $f_P(P)$  und  $f_P(Q)$  verlaufen. Daher ist  $f_G(g)$  gleich der eindeutigen Verbindungsgerade von  $f_P(P)$  und  $f_P(Q)$ , und diese ist schon durch  $f_P$  festgelegt.

**Definition 6.10.** Seien  $\mathcal{I}_1 = (\underline{P}_1, \underline{G}_1, R_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\underline{P}_2, \underline{G}_2, R_2)$  zwei Inzidenzebenen. Ein Morphismus  $f = (f_P, f_G) : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$  von Inzidenzebenen heißt *Isomorphismus*, wenn  $f_P$  und  $f_G$  bijektiv sind.  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus  $f : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$  gibt.

**Übungsaufgabe 6.11.** Ist  $f = (f_P, f_G) : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$  ein Isomorphismus von Inzidenzebenen, so ist auch  $f^{-1} := (f_P^{-1}, f_G^{-1}) : \mathcal{I}_2 \rightarrow \mathcal{I}_1$  ein Isomorphismus von Inzidenzebenen, also ein Morphismus von Inzidenzebenen, so dass  $f_P^{-1}$  und  $f_G^{-1}$  bijektiv sind.

**Lemma 6.12.** Seien  $\mathcal{I}_1 = (\underline{P}_1, \underline{G}_1, R_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\underline{P}_2, \underline{G}_2, R_2)$  Inzidenzebenen und

$$f = (f_P, f_G) : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$$

ein Isomorphismus. Zwei Geraden  $g, h \in \underline{G}_1$  sind genau dann parallel, wenn  $f_G(g)$  und  $f_G(h)$  parallel sind.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $g$  und  $h$  parallel sind, und wollen zeigen, dass  $f_G(g)$  und  $f_G(h)$  parallel sind. Falls  $f_G(g) = f_G(h)$  sind wir fertig. Andernfalls ist  $g \neq h$  und  $g$  und  $h$  haben keinen Schnittpunkt. Wäre  $P_2 \in \underline{P}_2$  ein Schnittpunkt von  $f_G(g)$  und  $f_G(h)$ , so könnten wir ein Urbild  $P_1 \in \underline{P}_1$  wählen (also  $P_2 = f_P(P_1)$ ), weil  $f_P$  bijektiv ist. Weil  $f$  ein Morphismus von Inzidenzebenen ist, muss  $P_1$  ein Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  sein.  $\zeta$

Wir nehmen nun an, dass  $f_G(g)$  und  $f_G(h)$  parallel sind. Ist  $f_G(g) = f_G(h)$ , so folgt  $g = h$ , weil  $f_G$  injektiv ist. Nehmen wir nun an, dass  $f_G(g) \neq f_G(h)$ , also auch  $g \neq h$ . Wäre  $P_1 \in \underline{P}_1$  ein Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ , so wäre  $f_P(P_1)$  ein Schnittpunkt von  $f_G(g)$  und  $f_G(h)$ .  $\zeta$  □

**Korollar 6.13.** Seien  $\mathcal{I}_1 = (\underline{P}_1, \underline{G}_1, R_1)$  und  $\mathcal{I}_2 = (\underline{P}_2, \underline{G}_2, R_2)$  Inzidenzebenen und  $f = (f_P, f_G) : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$  ein Isomorphismus. Dann gilt:

- (i) Ist  $\mathcal{I}_1$  eine affine Ebene, dann ist auch  $\mathcal{I}_2$  eine affine Ebene.
- (ii) Ist  $\mathcal{I}_1$  eine projektive Ebene, dann ist auch  $\mathcal{I}_2$  eine projektive Ebene.

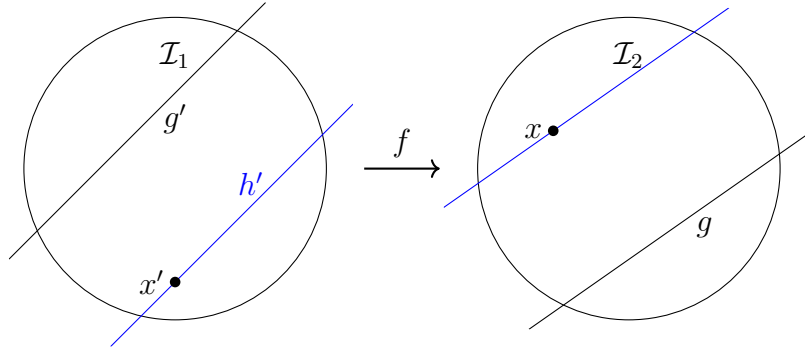
*Beweis.* (i) Für einen Punkt  $x \in \underline{P}_2$  und eine Gerade  $g \in \underline{G}_2$  müssen wir eine Parallele  $h \in \underline{G}_2$  zu  $g$  finden, die durch  $x$  läuft. Liegt  $x$  auf  $g$ , so ist  $g$  die gesuchte Gerade. Wir nehmen nun an, dass  $x$  nicht auf  $g$  liegt.

Da  $f$  ein Isomorphismus ist, gibt es  $x' \in \underline{P}_1$  und  $g' \in \underline{G}_1$  mit

$$f_P(x') = x, \quad f_G(g') = g.$$

Weil  $\mathcal{I}_1$  eine affine Ebene ist, gibt es eine eindeutige Parallele  $h' \in \underline{G}_1$  zu  $g'$ , sodass  $x'$  auf  $h'$  liegt. Sei  $h = f_G(h')$ . Weil  $f$  ein Morphismus von Inzidenzebenen ist, liegt  $x$  auf  $h$ . Außerdem schneiden sich  $g$  und  $h$  nicht. Denn: gäbe es einen Schnittpunkt  $y$ , so wäre das Urbild  $y' \in \underline{G}_1$  von  $y$  ein Schnittpunkt von  $g'$  und  $h'$ , was nicht sein kann.

- (ii) Der Beweis ist ähnlich wie in (i) und ich Übungsaufgabe. □



## 7. AFFINE VERSUS PROJEKTIVE EBENEN

In diesem Abschnitt wollen wir einen Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Ebenen herstellen. Es wird sich herausstellen, dass wir eine affine Ebene erhalten, wenn wir aus einer gegebenen projektiven Ebene eine Gerade und alle Punkte auf ihr entfernen. Andersherum kann man aus einer affinen Ebene eine projektive Ebene konstruieren, indem man in geeigneter Weise eine Gerade hinzufügt.

**7.1. Axiomatisch.** Wir betrachten eine projektive Ebene  $\mathbb{P} = (\underline{P}_{\mathbb{P}}, \underline{G}_{\mathbb{P}}, R_{\mathbb{P}})$  und wählen eine beliebige Gerade  $g_{\infty} \in \underline{G}_{\mathbb{P}}$ . Diese spielt die Rolle des Horizontes. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass wie eine affine Ebene erhalten, wenn wir  $g_{\infty}$  aus  $\mathbb{P}$  entfernen. Genauer gesagt definieren wir

$$\begin{aligned} \underline{P}_{\mathbb{A}} &:= \{x \in \underline{P}_{\mathbb{P}} \mid x \text{ liegt nicht auf } g_{\infty}\}, \\ \underline{G}_{\mathbb{A}} &:= \underline{G}_{\mathbb{P}} \setminus \{g_{\infty}\}, \\ R_{\mathbb{A}} &:= R_{\mathbb{P}} \cap (\underline{P}_{\mathbb{A}} \times \underline{G}_{\mathbb{A}}) \\ &= \{(x, g) \in \underline{P}_{\mathbb{A}} \times \underline{G}_{\mathbb{A}} \mid (x, g) \in R_{\mathbb{P}}\} \\ &= \{(x, g) \in \underline{P}_{\mathbb{A}} \times \underline{G}_{\mathbb{A}} \mid x \text{ liegt auf } g \text{ in } \mathbb{P}\}. \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen, dass

$$\mathbb{A} = (\underline{P}_{\mathbb{A}}, \underline{G}_{\mathbb{A}}, R_{\mathbb{A}})$$

eine affine Ebene ist, haben wir unser Ziel erreicht.

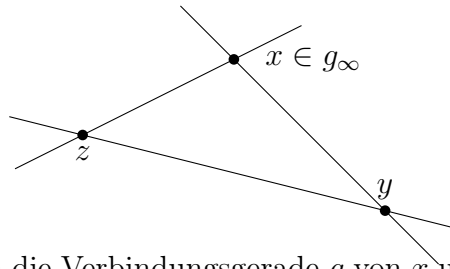
**Satz 7.1.** *A wie oben definiert eine affine Ebene.*

*Beweis.* Zunächst prüfen wir die drei Axiome einer Inzidenzebene.

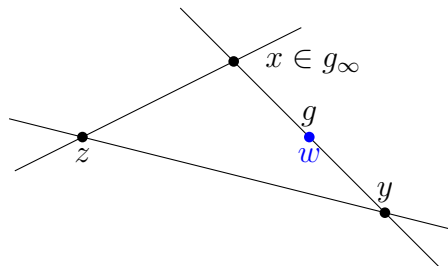
- (I<sub>1</sub>) Für zwei gegebene verschiedene Punkte  $x, y \in \underline{P}_{\mathbb{A}}$  müssen wir eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade konstruieren. Als Punkte in  $\mathbb{P}$  besitzen  $x$  und  $y$  eine eindeutige Verbindungsgerade  $g \in \underline{G}_{\mathbb{P}}$ . Da wir eine Gerade in  $\mathbb{A}$  brauchen, müssen wir uns noch davon überzeugen, dass  $g \neq g_{\infty}$ . Die Punkte  $x$  und  $y$  liegen aber nicht auf  $g_{\infty}$ , da sie Punkte in  $\mathbb{A}$  sind. Daher folgt  $g \neq g_{\infty}$ .
- (I<sub>2</sub>) Wir müssen zeigen, dass auf jeder Geraden  $g \in \underline{G}_{\mathbb{A}}$  mindestens zwei Punkte liegen. Nach Axiom (P<sub>1</sub>) liegen auf  $g$  mindestens drei Punkte  $x, y, z \in \underline{P}_{\mathbb{P}}$ . Von diesen drei Punkten kann höchstens einer auf  $g_{\infty}$  liegen, denn lägen zwei der Punkte  $x, y, z$  auf  $g_{\infty}$ , so wären  $g$  und  $g_{\infty}$  beides Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte, und es würde  $g = g_{\infty}$  folgen. Das kann aber nicht sein, da  $g \in \underline{G}_{\mathbb{A}}$ . Daher kann nur einer der Punkte  $x, y, z$  auf  $g_{\infty}$  liegen, und die übrigen beiden Punkte liegen dann in  $\mathbb{A}$ .

( $I_3$ ) Wir müssen drei Punkte in allgemeiner Lage finden. Es gibt zwar drei Punkte in allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}$ , aber wir müssen aufpassen, dass diese nicht auf  $g_\infty$  liegen, und daher wird das Argument etwas komplizierter. Wir starten mit drei Punkten  $x, y, z \in \underline{P}_\mathbb{P}$  in allgemeiner Lage.

1. Fall. Keiner der drei Punkte  $x, y, z$  liegt auf  $g_\infty$ . Dann sind alle drei Punkte in  $\mathbb{A}$ , und wir sind fertig.
2. Fall. Ein Punkt liegt auf  $g_\infty$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $x$  auf  $g_\infty$  liegt.

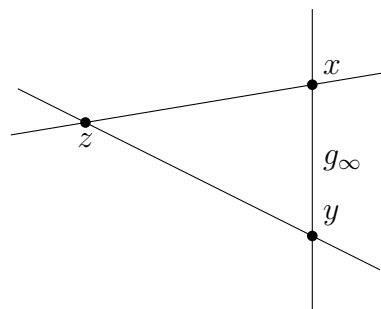


Wir betrachten die Verbindungsgerade  $g$  von  $x$  und  $y$ . Sie ist nicht gleich  $g_\infty$ , da  $y$  nicht auf  $g_\infty$  liegt. Nach Axiom ( $P_1$ ) gibt es noch einen weiteren Punkte  $w$  auf  $g$ , der nicht auf  $g_\infty$  liegt.



Wir behaupten, dass  $y, z, w$  in allgemeiner Lage sind. Die Punkte  $y$  und  $w$  liegen auf  $g$ , aber  $z$  nicht, da sonst  $x, y, z$  nicht in allgemeiner Lage wären. Also sind auch  $y, z, w$  in allgemeiner Lage.

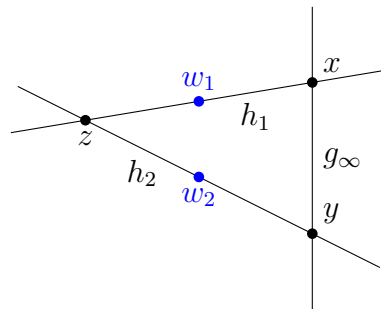
3. Fall. Zwei der der Punkte liegen auf  $g_\infty$ . Diese seien ohne Einschränkung  $x$  und  $y$ .



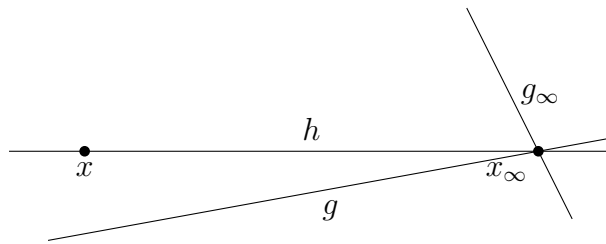
Dann ist die Verbindungsgerade von  $x$  und  $y$  gleich  $g_\infty$ . Auf der Verbindungsgerade  $h_1$  von  $x$  und  $z$  liegt ein weiterer Punkt  $w_1$  und auf der Verbindungsgerade  $h_2$  von  $y$  und  $z$  liegt ein weiterer Punkt  $w_2$ .

Die Punkte  $z, w_1, w_2$  liegen nicht auf  $g_\infty$ , und sie sind in allgemeiner Lage, da  $w_2$  nicht auf der Verbindungsgerade  $h_1$  von  $x$  und  $z$  liegt.

( $sP$ ) Als letztes prüfen wir das starke Parallelenaxiom. Für einen Punkt  $x \in \underline{P}_\mathbb{A}$  und eine Gerade  $g \in \underline{G}_\mathbb{A}$  müssen wir eine Parallele  $h \in \underline{G}_\mathbb{A}$  zu  $g$  finden, die durch  $x$  verläuft. Liegt  $x$  auf  $g$ , so ist  $g$  selbst die eindeutige Parallele zu  $g$  durch  $x$ . Nehmen



wir nun an, dass  $x$  nicht auf  $g$  liegt. Nach Axiom  $(P_2)$  existiert ein Schnittpunkt  $x_\infty \in \underline{P}_{\mathbb{P}}$  von  $g$  mit  $g_\infty$ . Sei  $h$  die Verbindungsgerade von  $x_\infty$  mit  $x$ .



Dann ist  $x_\infty$  der eindeutige Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Da  $x_\infty$  nicht in  $\mathbb{A}$  liegt, schneiden sich  $g$  und  $h$  in  $\mathbb{A}$  nicht, sie sind also parallel.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass es eine weitere von  $h$  verschiedene Parallele  $h' \in \underline{G}_{\mathbb{A}}$  zu  $g$  durch  $x$  gibt. Nach Axiom  $(P_2)$  gibt es in  $\mathbb{P}$  einen Schnittpunkt  $y$  von  $h$  mit  $h'$ . Da sich  $h$  und  $h'$  in  $\mathbb{A}$  nicht schneiden, muss dieser Schnittpunkt  $y$  auf  $g_\infty$  liegen. Damit sind  $h$  und  $h'$  beide Verbindungsgeraden von  $x$  mit  $y$ . Aber das ist nicht möglich. Somit ist  $h$  die einzige Parallele zu  $g$  durch  $x$ .

□

**7.2. Reelle affine und projektive Ebenen.** Wir betrachten das Beispiel der reellen affinen Ebene  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  und der reellen projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Bis jetzt haben wir in  $\mathbb{R}^3$  nur Ebenen betrachtet, die durch 0 verlaufen. Sie sind von der Form  $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$  mit  $v, w \in \mathbb{R}^3$ , so dass  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ . Eine allgemeine Ebene in  $\mathbb{R}^3$  ist von der Form

$$A + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w = \{A + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

für  $A, v, w \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$ .

Genauso definieren wir allgemeine Geraden als Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$  der Form

$$A + \mathbb{R}v = \{A + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

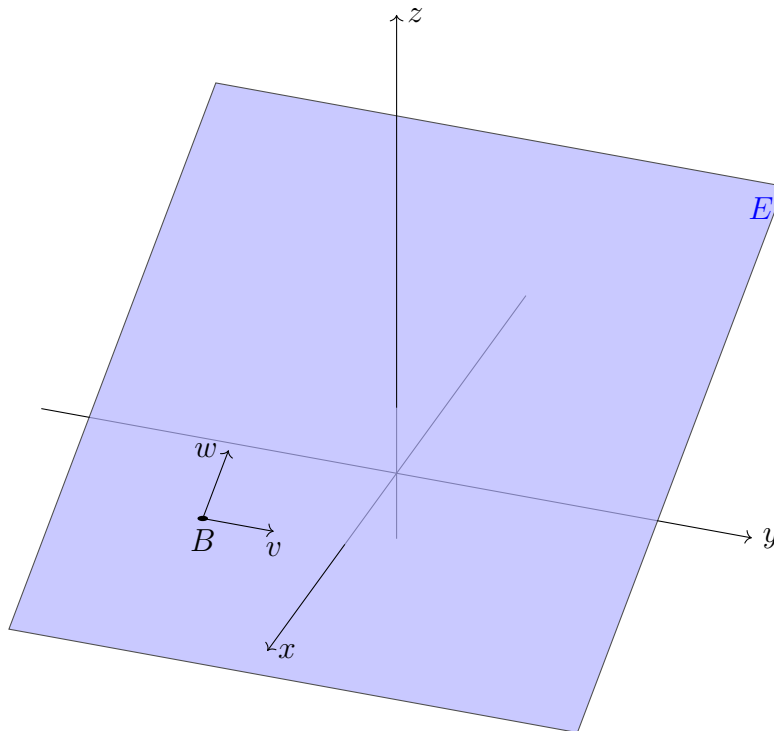
für  $A \in \mathbb{R}^3$  und  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Für eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  definieren wir

$$\underline{P}_E = E$$

$$\underline{G}_E = \{g \text{ Gerade in } \mathbb{R}^3 \mid g \subset E\}$$

$$R_E = \{(P, g) \in \underline{P}_E \times \underline{G}_E \mid P \text{ liegt auf } g\}.$$

**Übungsaufgabe 7.2.**  $\mathbb{A}_E := (\underline{P}_E, \underline{G}_E, R_E)$  ist eine Inzidenzebene, und sogar eine affine Ebene.



Wir definieren

$$f_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$$

$$(\lambda, \mu) \mapsto A + \lambda v + \mu w$$

und

$$f_G : \underline{G}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})} \rightarrow \underline{G}_E$$

$$g_{B,(x_1,x_2)} \mapsto g_{f_P(B),x_1v+x_2w}$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\{B + \alpha(x_1, x_2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \{f_P(B) + \alpha(x_1v + x_2w) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

**Lemma 7.3.**  $f = (f_P, f_G)$  ist ein Isomorphismus

$$f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow E.$$

*Beweis.* Übungsaufgabe. Man mache sich klar, dass für  $B + \alpha x \in g_{B,x}$  mit  $B = (B_1, B_2)$  und  $x = (x_1, x_2)$  gilt

$$f_P(B + \alpha x) = \underbrace{A + B_1v + B_2w}_{=f_P(B)} + \underbrace{\alpha x_1v + \alpha x_2w}_{=\alpha(x_1v+x_2w)} \in f_G(g_{B,x})$$

□

**Konstruktion 7.4.** Sei  $E_\infty \in \underline{G}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$  eine beliebige Gerade. Die Bezeichnung  $E_\infty$  kommt daher, dass diese Gerade die Rolle des „Horizonts“ übernehmen wird, also der Gerade, auf der die unendlich fernen Punkte liegen. Laut Definition der Geraden in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist  $E_\infty$  eine Ebene durch 0 in  $\mathbb{R}^3$ . Sie ist von der Form

$$E_\infty = \mathbb{R}v_\infty + \mathbb{R}w_\infty$$

für  $v_\infty, w_\infty \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbb{R}v_\infty \neq \mathbb{R}w_\infty$ .

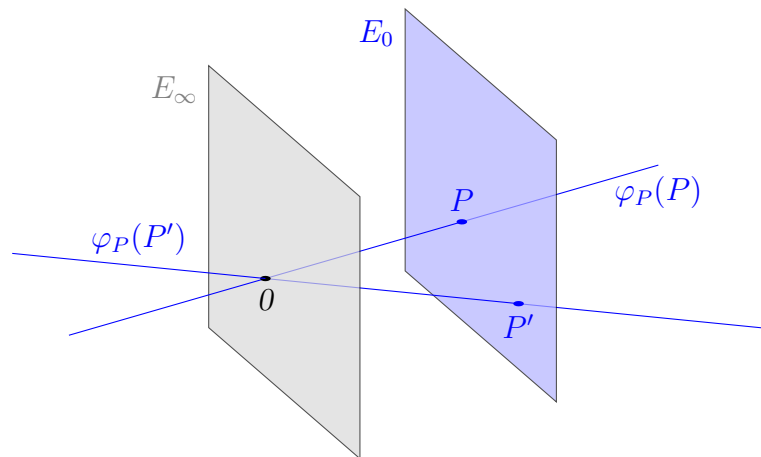
Wir wählen einen Punkt  $A \in \mathbb{R}^3$ , der nicht in  $E_\infty$  liegt. Dann ist

$$E_0 := A + E_\infty$$

eine Ebene, die zu  $E_\infty$  parallel ist, aber nicht durch  $0$  verläuft. Wir definieren folgende Abbildung.

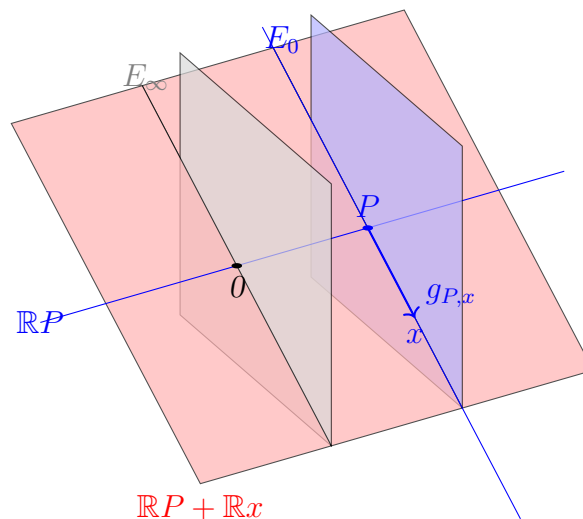
$$\begin{aligned} \varphi_P : E &\rightarrow \underline{P}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} = \{g \subset \mathbb{R}^3 \text{ Gerade durch } 0\} \\ P &\mapsto \mathbb{R}P = \overleftrightarrow{0P} \end{aligned}$$

man beachte, dass  $0 \notin E_0$ , deshalb gilt immer  $P \neq 0$ .



Nun brauchen wir noch eine Abbildung auf den Geraden. Die definieren wir folgendermaßen.

$$\begin{aligned} \varphi_G : \underline{G}_{E_0} &\rightarrow \underline{G}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \\ g_{P,x} &\mapsto \mathbb{R}P + \mathbb{R}x \end{aligned}$$



**Übungsaufgabe 7.5.**  $\mathbb{R}P + \mathbb{R}x$  hängt nicht von der Wahl von  $P$  und  $x$  ab, das heißt, wenn  $g_{P,x} = g_{P',x'}$ , dann folgt  $\mathbb{R}P + \mathbb{R}x = \mathbb{R}P' + \mathbb{R}x'$ . Außerdem gilt

$$g_{P,x} = P + \mathbb{R}x \subseteq \mathbb{R}P + \mathbb{R}x = \varphi_G(g_{P,x}).$$

**Proposition 7.6.** Die Abbildungen  $\varphi_P$  und  $\varphi_G$  aus Konstruktion 7.4 definieren einen Morphismus von Inzidenzebenen

$$\varphi = (\varphi_P, \varphi_G) : E_0 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

*Beweis.* Sei  $P \in E_0$  ein Punkt und  $g \subset E_0$  eine Gerade. Wir müssen zeigen, dass  $P$  genau dann auf  $g$  liegt, wenn  $\varphi_P(P)$  auf  $\varphi_G(g)$  liegt. Angenommen  $P \in g$ . Dann kann man  $g$  in der Form

$$g = P + \mathbb{R}x$$

schreiben wir  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi_P(P) &= \mathbb{R}P \\ \varphi_G(g) &= \mathbb{R}P + \mathbb{R}x\end{aligned}$$

und offensichtlich gilt  $\mathbb{R}P \subset \mathbb{R}P + \mathbb{R}x$ , also liegt  $\varphi_P(P)$  auf  $\varphi_G(g)$ .

Wir nehmen nun an  $\varphi_P(P)$  liegt auf  $\varphi_G(g)$ . Laut Definition ist  $E_g := \varphi_G(g)$  eine Ebene durch 0 in  $\mathbb{R}^3$ , also ein zweidimensionaler Vektorraum, und  $\varphi_P(P) = \mathbb{R}P$  ist darin enthalten. Wir haben nach Annahme  $g \subset E_0$  und nach Konstruktion  $g \subset E_g$ . Nach Lemma 5.6 schneiden sich  $E_0$  und  $E_g$  in einer Gerade. Diese Gerade muss gleich  $g$  sein. Außerdem ist  $P \in E_0$  und  $P \in E_g$ , also folgt  $P \in g$ .  $\square$

**Korollar 7.7.**  $\iota := \varphi \circ f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist ein Morphismus von Inzidenzebenen.

Wir wollen nun das Bild von  $\varphi_P$  und  $\varphi_G$  bestimmen. Dafür brauchen wir noch folgendes Lemma.

**Lemma 7.8.** Eine Gerade  $g \subset \mathbb{R}^3$  durch 0 ist genau dann parallel zu  $E_0$ , wenn sie in  $E_\infty$  enthalten ist.

*Beweis.* Ist  $g \subset E_\infty$ , so dass  $g$  keinen Schnittpunkt mit  $E_0$  haben, da  $E_\infty \cap E_0 = \emptyset$ . Also ist  $g$  parallel zu  $E_0$ . Nehmen wir andersherum an, dass  $g$  parallel zu  $E_0$  ist, aber nicht in  $E_\infty$  enthalten. Wir schreiben  $g = \mathbb{R}x$  für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$E_\infty = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \subsetneq \mathbb{R}v + \mathbb{R}w + \mathbb{R}x.$$

Daher muss  $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w + \mathbb{R}x = \mathbb{R}^3$  gelten. Wir können also  $A \in E_0$  in der Form

$$A = \alpha x + \lambda v + \mu w$$

schreiben, mit  $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann folgt  $\alpha x = A - \lambda v - \mu w \in E_0$ . Aber  $\alpha x$  liegt auch auf  $g = \mathbb{R}x$ , ist also ein Schnittpunkt von  $g$  und  $E_0$ , was im Widerspruch zur Annahme steht, dass  $g$  parallel zu  $E_0$  ist.  $\square$

**Proposition 7.9.** Das Bild von  $\varphi_P$  besteht aus allen Geraden in  $\mathbb{R}^3$ , die nicht in  $E_\infty$  liegen. Das Bild von  $\varphi_G$  besteht aus allen Ebenen außer  $E_\infty$ .

*Beweis.* Für  $P \in E_0$  ist  $\varphi_P(P) = \mathbb{R}P$  eine Gerade, die  $E_0$  im Punkt  $P$  schneidet. Die Ebene  $E_\infty$  ist parallel zu  $E_0$ , hat also keine Schnittpunkte mit  $E_0$ . Alle Geraden in  $E_\infty$  schneiden  $E_0$  nicht, können also nicht im Bild von  $\varphi_P$  liegen. Daraus folgt

$$\varphi_P(E_0) = \{g \subset \mathbb{R}^3 \text{ Gerade durch } 0, g \not\subset E_\infty\}.$$

Sei nun  $g$  ein Gerade in  $\mathbb{R}^3$  durch 0, die nicht in  $E_\infty$  enthalten ist. Dann ist  $g$  nach Lemma 7.8 nicht parallel zu  $E_0$ , also schneiden sich  $g$  und  $E_0$  in einem Punkt  $P \in E_0$ . Dann muss gelten  $g = \mathbb{R}P$  und  $\varphi_P(P) = g$ . Wir haben somit das Bild von  $\varphi_P$  bestimmt.

Schauen wir uns nun  $\varphi_G$  an. Für eine Gerade  $g = g_{P,x} \in \underline{G}_{E_0}$  ist

$$E_g = \varphi_G(g) = \mathbb{R}P + \mathbb{R}x.$$

Die Ebene  $E_g$  kann nicht gleich  $E_\infty$  sein, da  $E_\infty$  parallel zu  $E_0$  ist, aber  $E_g$  den Punkt  $x \in E_0$  enthält.

Sei nun  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Ebene durch 0, die nicht gleich  $E_\infty$  ist. Sei  $P \in E$  ein Punkt, der nicht auf  $E_\infty$  liegt. Dann gilt

$$E_\infty = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \subsetneq \mathbb{R}v + \mathbb{R}w + \mathbb{R}P$$

und folglich  $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w + \mathbb{R}P = \mathbb{R}^3$ . Dann können wir den Punkt  $A \in E_0$  in der Form

$$A = \alpha P + \lambda v + \mu w$$

schreiben, mit  $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt

$$\alpha P = A - \lambda v - \mu w \in E_0 \cap E.$$

Außerdem ist  $E \cap E_\infty$  nach Lemma 5.6 eine Gerade von der Form  $\mathbb{R}x$  für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Dann ist für alle  $\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha P + \beta x \in \alpha P + E_\infty = E_0.$$

Folglich gilt  $g_{\alpha P, x} = \alpha P + \mathbb{R}x \subseteq E_0$  und

$$\varphi_G(g_{\alpha P, x}) = \mathbb{R} \cdot \alpha P + \mathbb{R}x = \mathbb{R}P + \mathbb{R}x \subseteq E.$$

Da  $\mathbb{R}P + \mathbb{R}x$  eine Ebene ist, muss schon  $\mathbb{R}P + \mathbb{R}x = E$  gelten. □

## LITERATUR

[Hil99] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Klassische Texte der Wissenschaft. Springer Spektrum, Berlin, 1899.

*Email address:* huebner@math.uni-frankfurt.de

ROBERT MAYER STRASSE 6-8, 60325 FRANKFURT