Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei T der Torus, der durch Verkleben von gegenüberliegenden Kanten im Einheitsquadrat $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ hervorgeht.
Geben Sie einen komplexen Atlas von T mit genau 3 Karten an.
Anmerkung: Mit Hilfe der Fundamentalgruppe (lernen wir in ein paar Wochen kennen) kann man zeigen, dass man mindestens 3 Karten für einen Atlas des Torus braucht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

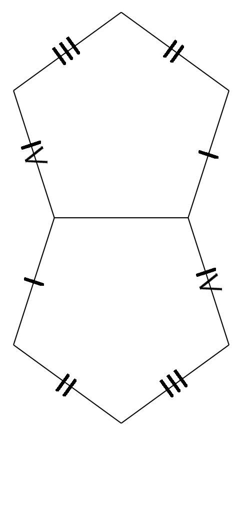
Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf X heißt maximal, wenn er die folgende Eigenschaft hat: Ist $\mathcal{B}$ ein weiterer Atlas auf X mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, so gilt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Zeigen Sie, dass jeder Atlas in einem eindeutigen maximalen Atlas enthalten ist.
Hinweis: Dafür könnte etwas Zorn vonnöten sein.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $\tau_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation um v. Zeigen Sie, dass τ_v eine biholomorphe Abbildung auf dem Torus $T = [0,1]^2/_\sim$ induziert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Finden Sie eine zu der Diedergruppe D_5 (Symmetriegruppe des regelmäßigen 5-Gons) isomorphe Untergruppe der Automorphismengruppe des Doppel-5-Gons (betrachtet als Riemannsche Fläche).



Aufgabe 5 (2 Punkte)

Seien X, Y Translationsflächen. Eine Abbildung $f\colon X \to B$ heißt Morphismus von Translationsflächen, wenn für alle Karten (U, g) von X und (V, h) von Y die Abbildung

$$h \circ f \circ g^{-1}\colon g(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{C}$$

eine Translation ist.
Der Torus und das Doppel-5-Gon ohne die Ecken sind Translationsflächen. Welche der Isomorphismen aus Aufgabe 3 und Aufgabe 4 sind Morphismen von Translationsflächen?

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 28. Oktober**.