

## Übungsblatt 3

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\} \subset \mathbb{C}^2$  und  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x$ . Geben Sie einen komplexen Atlas von  $X$  an.

*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über implizit definierte Funktionen.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$  mit  $n \geq 1, a_n \neq 0$  und  $\hat{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  die Fortsetzung von  $f$  durch  $\hat{f}(\infty) := \infty$ .

Zeigen Sie, dass  $\hat{f}$  holomorph ist und bestimmen Sie  $e_\infty(\hat{f})$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

- (a) Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zusammenhängender Riemannscher Flächen und sei  $x \in X$ . Zeigen Sie, dass für jede Karte  $(U, g)$  um  $x$  und jede Karte  $(V, h)$  um  $f(x)$  gilt:

$$e_x(f) = \min\{k \in \mathbb{N} : (h \circ f \circ g^{-1})^{(k)}(g(x)) \neq 0\}.$$

- (b) Setzen Sie die Abbildung

$$j: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 256 \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}$$

zu einer holomorphen Abbildung

$$\hat{j}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

fort und bestimmen Sie die Verzweigungspunkte sowie den Grad von  $\hat{j}$ .

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *topologische Überlagerung*, wenn  $f$  surjektiv ist und jedes  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $V$  besitzt, zu der offene Mengen  $U_i \subseteq X$  ( $i \in I$ ) mit

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

existieren, so dass  $f|_{U_i}: U_i \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie:

- (a) Sind  $X, Y$  zusammenhängende Riemannsche Flächen, und  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive unverzweigte Überlagerung, dann ist  $f$  eine topologische Überlagerung.
- (b) Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine topologische Überlagerung und  $Y$  eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf  $X$ , so dass  $f$  eine holomorphe, unverzweigte Überlagerung ist.

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 4. November**.