

## Übungsblatt 4

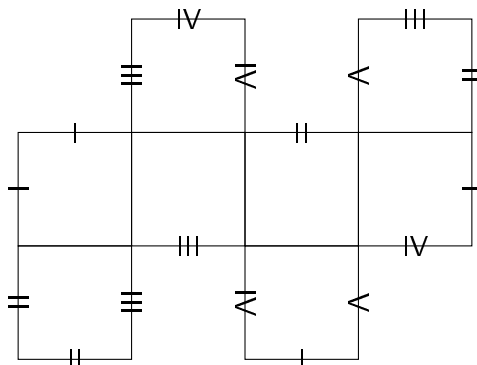
### Aufgabe 1 (2 Punkte)

Für  $\tau \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(\tau) > 0$  definieren wir  $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ .

- Zeigen Sie dass die Quotientenabbildung  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_\tau$  eine unverzweigte Überlagerung vom Grad  $\infty$  ist.
- Zeigen Sie, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Identität  $\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine unverzweigte Überlagerung  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\frac{1}{n}\tau}$  induziert und bestimmen Sie den Grad.

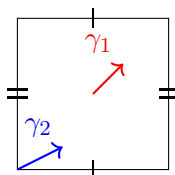
### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei  $W$  die eierlegende Wollmilchsau:



- Zeigen Sie, dass sich die Abbildung die das Innere jedes Quadrates von  $W$  auf das Innere des Einheitsquadrates zu einer Abbildung  $f: W \rightarrow T$  fortsetzen lässt. Zeige weiter, dass  $f$  eine verzweigte Überlagerung vom Grad 8 ist und bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und ihre Verzweigungsordnung.

Wir betrachten nun folgende Wege im Torus.



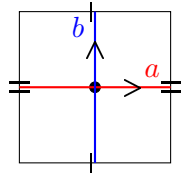
- Bestimmen Sie den eindeutigen Lift des Weges  $\gamma_1$  entlang  $f$  zu jedem möglichen Anfangspunkt.
- Bestimmen Sie alle Lifte des Weges  $\gamma_2$  entlang  $f$ .

Sei  $f: Y \rightarrow X$  eine endliche unverzweigte Überlagerung,  $x \in X$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$  mit Startpunkt  $x$ . Wir definieren

$$m_\gamma := [y \mapsto \tilde{\gamma}_y(1)] \in \text{Aut}(f^{-1}(x)),$$

wobei  $\tilde{\gamma}_y$  der Lift von  $\gamma$ , der bei  $y \in f^{-1}(x)$  beginnt ist, und  $\text{Aut}(f^{-1}(x))$  die Bijektionen der endlichen Menge  $f^{-1}(x)$  bezeichnet.  $m_\gamma$  heißt Monodromie von  $\gamma$ .

(d) Bestimmen Sie  $m_a$  und  $m_b$  für die Wege  $a, b$  mit Startpunkt  $[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$  (siehe unten).



### Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  und  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass  $X/\sim$  folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(x) = f(y) \forall x \sim y$  existiert genau eine stetige Abbildung  $\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y$ , die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\sim \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & Y \end{array}$$

zum kommutieren bringt.

(b) Zeigen Sie, dass  $X/\sim$  eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt ist.

Sehr viele Objekte der Algebra erfüllen eine universelle Eigenschaft bzw. können mit dem selben Argument aus dem Beweis von b) durch eine universelle Eigenschaft definiert werden. Hier ein Beispiel aus der Linearen Algebra.

(c) Sei  $S := \{s_1, \dots, s_n\}$  eine Menge und  $\mathbb{K}$  ein Körper. Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{K}^n$  und  $\iota: S \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $s_i \mapsto e_i$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{K}^n$  folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Für jeden anderen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  und jede Abbildung  $f: S \rightarrow V$ , existiert genau eine lineare Abbildung  $\tilde{f}: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ , die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{K}^n \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & V \end{array}$$

zum kommutieren bringt.

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$ . Sei weiter  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung mit  $f(x_0) = y_0$ . Zeigen Sie

(a)  $f$  induziert einen Gruppenhomomorphismus  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$

(b)  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

Sei  $Z$  ein weiterer topologischer Raum,  $z \in Z$  und  $g: Y \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung mit  $g(y_0) = z$ . Zeigen Sie

(c)  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Zwei stetige Abbildungen  $f, h: X \rightarrow Y$  heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt mit  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = h(x)$  für alle  $x \in X$  und  $H(x_0, s) = y_0$  für alle  $s \in [0, 1]$ .

(d) Ist  $h: X \rightarrow Y$  homotop zu  $f$  dann gilt  $f_* = h_*$ .

*Anmerkung:* (a)-(c) zeigt, dass  $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$ ,  $f \mapsto f_*$  einen kovarianten Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen definiert. (d) zeigt weiter, dass dieser über  $\text{hTop}_*$  (Objekte: topologische Räume, Morphismen: Homotopieklassen von stetigen Abbildungen) faktorisiert.

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 11. November**.