Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
11. November 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei F_n die freie Gruppe vom Rang n mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$ und w ein Wort in den Elementen $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ in dem a_1 genau einmal und a_1^{-1} nicht vorkommt.
Zeigen Sie, dass die Gruppe mit der Präsentation

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid w \rangle$$

eine freie Gruppe ist und bestimmen Sie den Rang.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Stellen Sie folgende Gruppen als amalgamiertes Produkt zyklischer Gruppen dar.

(a) $\langle x, y \mid y^6,\ x^3y^3 \rangle$

(b) $\langle x, y \mid x^5,\ y^{10},\ x^3y^8 \rangle$

(c) $\langle x, y \mid x^4,\ y^6,\ x^3y^3 \rangle$

(d) $\langle x, y \mid x^5,\ y^6,\ x^3y^3 \rangle$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei G ein zusammenhängender Graph. G wird zu einem topologischen Raum, indem wir jede Kante mit $[0,1]$ identifizieren und G mit der Quotiententopologie versehen. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von G eine freie Gruppe vom Rang $E - V + 1$ ist, wobei E die Anzahl der Kanten und V die Anzahl der Knoten bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $S^2 \vee S^1$ und die universelle Überlagerung. Dabei ist $S^2 \vee S^1$ das Wedge-Produkt von S^2 und S^1.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$ ein Diagramm von Gruppen bzw. topologischen Räumen. Wir definieren (falls existent) das Pushout des Diagramms als eine Gruppe bzw. topologischen Raum $X \sqcup_Z Y$ zusammen mit Homomorphismen $\pi_X \colon X \to X \sqcup_Z Y$, $\pi_Y \colon Y \to X \sqcup_Z Y$ welche folgende universelle Eigenschaft erfüllt.
Für jede andere Gruppe bzw. topologischen Raum K und jede Homomorphismen $h_X \colon X \to K$, $h_Y \colon Y \to K$, die $f \circ h_X = g \circ h_Y$ erfüllen, gibt es genau einen Morphismus der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \arrow[ddr, bend left, "h_X"] & \\
Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[drr, bend right, "h_Y"'] & X \sqcup_Z Y \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}$$

zum kommutieren bringt.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Diagramm von Gruppen bzw topologischen Räumen wie oben ein Pushout besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Wedge-Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0) das Pushout des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\
Y &
\end{tikzcd}$$

, wobei $f(*) = x_0$ und $g(*) = y_0$ ist.

Anmerkung: Schauen Sie sich nach dieser Aufgabe nochmal Seifert-van Kampen an.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 18. November**.