Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
18. November 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

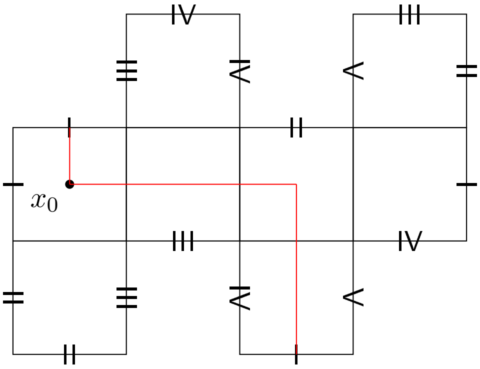
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie für eine beliebige Gruppe G einen topologischen Raum BG mit Fundamentalgruppe $\pi_1(BG) \cong G$.
Hinweis: Wählen Sie eine Präsentation von G und finden Sie einen Raum der als Fundamentalgruppe die freie Gruppe auf der Menge der Erzeuger von G hat. Überlegen Sie sich nun wie man die Relationen realisieren kann und benutzen Sie Seifert-van Kampen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei W (mal wieder :-)) die eierlegende Wollmilchsau:



Für jede markierte Kante K betrachten wir einen geschlossenen Weg Γ_K der im Punkt x_0 startet, außerhalb der Ecken verläuft, die Kante K genau einmal passiert und sonst keine anderen markierten Kanten schneidet. Im Bild ist ein möglicher Weg für die horizontale Kante I eingezeichnet.
Sei G die Menge aller Γ_K zu jeder beliebigen Kante K und Σ die Menge aller Ecken von W.

(a) Zeigen Sie, dass G die Fundamentalgruppe von $O \setminus \Sigma$ zum Basispunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erzeugt.

Sei p die unverzweigte Überlagerung $p\colon W \setminus \Sigma \to T \setminus \{\infty\}$, welche man aus der Überlagerung von Blatt 4 Aufgabe 2 durch entfernen der Verzweigungspunkte erhält.

(b) Bestimmen Sie $p_*(\pi_1(W \setminus \Sigma), x_0) \subset \pi_1(T \setminus \{\infty\}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Hinweis zu a): Induktion über die Anzahl an Durchlaufen der markierten Kanten

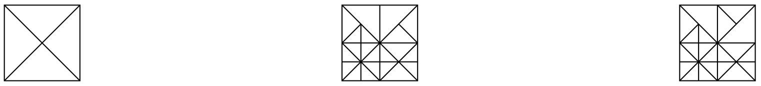
Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche von Geschlecht g und seien $p, p_1, \ldots, p_r \in X$ paarweise verschiedene Punkte, so dass $g + r > 1$.

Zeigen Sie, dass $\pi_1(X \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}, p)$ eine freie Gruppe in $2g + r - 1$ Erzeugern ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Begründen Sie, warum die folgende Unterteilungen des Torus in Dreiecke keine Triangulierungen sind.



(b) Finden Sie eine Triangulierung von S^2 mit genau 6 Ecken.

(c) Finden Sie eine Triangulierung des Torus mit genau 7 Ecken.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 25. November**.