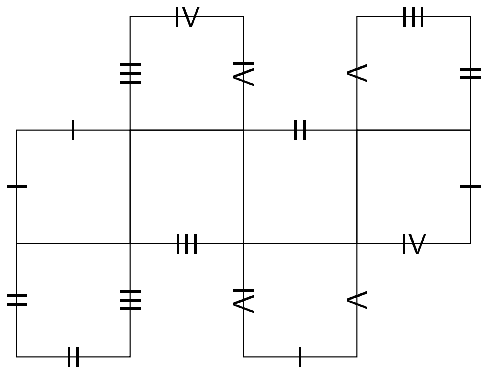
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
25. November 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (8 Punkte)



(a) Berechnen Sie das Geschlecht der Wollmilchsau.

Sei $p\colon W \setminus \Sigma \to T \setminus \{\infty\}$ die unverzweigte Überlagerung von Blatt 4 Aufgabe 2.

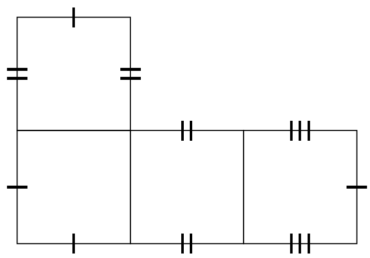
(b) Berechnen Sie die Monodromieabbildung von p.

(c) Berechnen Sie die Monodromiegruppe von p.

(d) Berechnen Sie die Galoisgruppe von p. Ist p normal?

Hinweis: Ein Blick in alte Aufgaben kann sich lohnen.

Sei L das Origami



und $q\colon L \setminus \Sigma \to T \setminus \{\infty\}$ die zu p analoge unverzweigte Überlagerung auf den punktierten Torus.

(e) Berechen Sie die Galoisgruppe von q. Ist q normal?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei Y vom Geschlecht g fest und sei $f\colon X \to Y$ eine unverzweigte zusammenhängende Überlagerung mit $\deg f = 2$.

Zeigen Sie: Es existieren genau $2^{2g} - 1$ paarweise nicht-isomorphe (als Überlagerungen über Y) Überlagerungen dieses Typs.

(b) Sei $Y := \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Geben Sie drei Untergitter $\Lambda_i \subseteq \Lambda$ an, so dass $f_i\colon \mathbb{C}/\Lambda_i \to \mathbb{C}/\Lambda$ den drei nicht-isomorphen unverzweigten Grad-2-Überlagerungen entsprechen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $[G,G] := \left\{ \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i] : n \in \mathbb{N},\ x_i, y_i \in G \right\} \subseteq G$.

(a) Zeigen Sie, dass $[G,G]$ ein Normalteiler in G ist und dass $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ abelsch ist.

Wir nennen $[G,G]$ den *Kommutatoruntergruppe* von G und G^{ab} die *Abelisierung*.

(b) Sei $\pi\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die kanonische Projektion.

Zeigen Sie, dass G^{ab} die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Sei A eine abelsche Gruppe und $f\colon G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus; dann gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi\colon G^{\mathrm{ab}} \to A$ der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[dl, dotted, "\Phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

zum kommutieren bringt.

(c) Sei $D_n := \langle r, s \mid r^n,\ s^2,\ (sr)^2 \rangle$ die Diedergruppe ($n \in \mathbb{N}$).

Schreiben Sie die Abelisierung D_n^{ab} als Produkt zyklischer Gruppen.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 2. Dezember**.